

大阪市立大学工学部 正員 倉田 克彦

はじめに

近年、大型電子計算機の発達とともに、微分方程式等を豊富な数学的知識・技術を駆使して解く代りに、膨大ではあるが単純な代数的数値計算によって解く数値解析の手法が発展し、海岸工学の分野にも多く用いられるようになってきた。この数値解析法の1つである有限要素法も“波の問題”に関して用いられるようになってきたが、そのほとんどが微小振幅波の場合についてであって、有限振幅波の場合についての報告はごく僅かであった。有限振幅波の場合には、非線型境界条件のため取扱うべき項数が非常に多くなるので、本報告では、それを簡略化して、直立円柱に働く波力を有限要素法によって解析した。

汎函数

図-1に示すように、一様な水深 h の水域に直径 D なる円柱が水底から水面上まで直立している。座標系は図-1に示すように選び、入射波は x 軸の正方向へ進行する y 軸方向には一様な波とする。水は非粘性、非圧縮性であって、非回転運動をおこなっている。入射波および円柱の周りの入射波と散乱波とが重なり合った波動の場における速度ポテンシャル ϕ_i および ϕ を次のように表わす。

$$\phi = \phi_1^* \cosh k_1(h+z)e^{-i\omega t} + \phi_2^* \cosh k_2(h+z)e^{-i2\omega t} + \phi_3^* \cosh k_3(h+z)e^{-i3\omega t} \quad (1)$$

式(1)をラプラスの方程式に代入すると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \phi_m^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_m^*}{\partial y^2} + (mk)^2 \phi_m^* = 0 \quad (m=1, 2, 3) \quad (2)$$

式(2)の両辺に $\delta \phi_m^*$ を掛け、考えている領域 Ω 全体にわたって積分をおこない、グリーンの公式を用いれば

$$\begin{aligned} & -\delta \left[\frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial \phi_m^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_m^*}{\partial y} \right)^2 - (mk)^2 (\phi_m^*)^2 \right\} dS \right] \\ & + \oint_C \delta \phi_m^* \frac{\partial \phi_m^*}{\partial n} ds = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

のようになる。円柱側面上での境界条件

$$\frac{\partial \phi_m^*}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_c \quad (4)$$

計算の都合上、無限遠境界($r \rightarrow \infty$)の代わりに $r = r_0$ に設けた仮想無限遠境界 Γ_R に於て放射条件(radiation condition)が成立つとすれば、

$$\frac{\partial \phi_m^*}{\partial n} = \left[(imk - \frac{1}{2r}) \phi_m^* + \left\{ \frac{-i}{2r} - imk(1 - \cos \alpha) \right\} \phi_{im}^* \right] \quad (5)$$

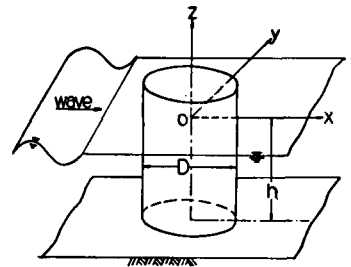
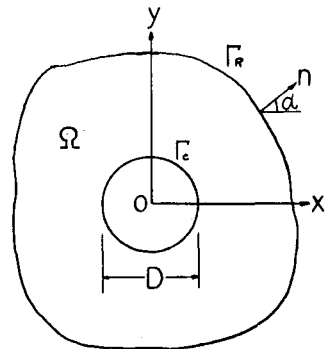


図-1. 波浪中の円柱

図-2. 領域 Ω と境界 Γ_c , Γ_R

式(4), (5)を式(3)に代入すれば, 次のように汎函数 Π_m が求まる。

$$\begin{aligned} \Pi_m = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial \phi_m^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_m^*}{\partial y} \right)^2 - (m k)^2 (\phi_m^*)^2 \right\} dS \\ & + \oint_{\Gamma_R} \left[\frac{1}{2} (i m k - \frac{1}{2r}) (\phi_m^*)^2 + \left\{ \frac{1}{2r} - i m k (1 - \cos \theta) \right\} \phi_m^* \phi_{im}^* \right] dS \end{aligned} \quad (6)$$

参考のために, 入射波および散乱波を微小振幅波とした時の速度ポテンシャル ϕ_i および ϕ_s を

$$\left. \begin{aligned} \phi_i &= \left\{ \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \phi_{i,\lambda}^* e^{i\lambda\theta} \right\} \cdot \cos k r (r+z) \cdot e^{-i\sigma t} \\ \phi_s &= \left\{ \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \phi_{s,\lambda}^* e^{i\lambda\theta} \right\} \cdot \cos k r (r+z) \cdot e^{-i\sigma t} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

のように表わした場合について検討をおこなった。この場合, 散乱波に関してラプラスの方程式は

$$\frac{\partial^2 \phi_{s,\lambda}^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_{s,\lambda}^*}{\partial r} - \lambda^2 \phi_{s,\lambda}^* + k^2 \phi_{s,\lambda}^* = 0 \quad (8)$$

となり, 汎函数 $\Pi_{s,\lambda}$ が次のように求まる。

$$\begin{aligned} \Pi_{s,\lambda} = & \frac{1}{2} \int_{r=\frac{D}{2}}^{r_f} \left\{ r \left(\frac{\partial \phi_{s,\lambda}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\lambda^2}{r^2} - k^2 \right) (\phi_{s,\lambda}^*)^2 \right\} dr \\ & - \left\{ [\phi_{s,\lambda}^* \cdot r \cdot \frac{\partial \phi_{i,\lambda}}{\partial n}]_{r=\frac{D}{2}} + \left[\frac{1}{2} (i k - \frac{1}{2r}) r \cdot (\phi_{s,\lambda}^*)^2 \right]_{r=r_f} \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

数値計算

微小振幅波の場合の計算結果を図-3に, Stokes波の2次および3次近似解の場合の結果を図-4に示す。微小振幅波の場合には, $\Delta\theta \leq \pi/20$, $\Delta r/D = 0.125$, $r_f/D \geq 1.5$ であれば, $D/L_A = 0.02 \sim 1.0$ の範囲で厳密解とほぼ3%程度以下の違いで波力を計算できる。また, 式(7)のように速度ポテンシャルを表わした場合には, $\Delta r/D = 0.125$, $r_f/D \geq 3.50$ であれば厳密解とほとんど一致した値が得られる。この結果より, 解析的方法と数値計算法とをうまく組み合わせれば比較的簡単な, 短い時間の計算で高い精度の解を得ることができるという極めて常識的な結論が導き出される。式(6)に示す汎函数 Π_m の誘導過程から明らかなように, 取扱いをかなり簡略化しているにも拘わらず, 2次解に対する有限要素法と摂動法とによる値の違いは図-4に示すように数%程度以下であるので, 3次解の場合にも同様の領域の分割方法を用いて計算した。

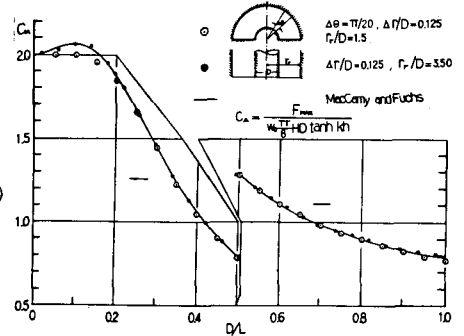


図-3. 微小振幅波の場合の計算値

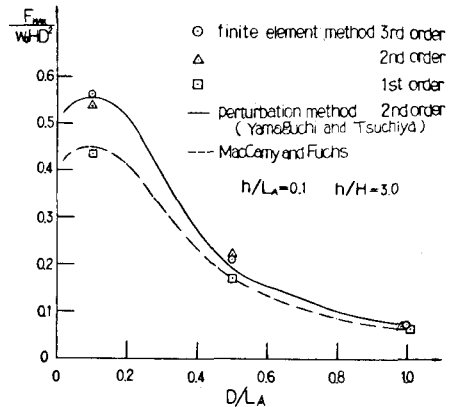


図-4. 有限振幅波の場合の計算値