

舞鶴工業高等専門学校 正員 前野賢彦
正員 杉本修一
明石工業高等専門学校 正員 西村益夫

無限に延びた直線の防波堤の1ヶ所に開口部があるとき、その開口部を通過する波浪については、従来より多くの研究者によって報告がなされている。例えば Lamb は彼の名著 *Hydrodynamics*⁽¹⁾ に、この問題の近似計算を述べている。1896 年に Sommerfeld⁽²⁾ は半無限長の直線の先端を回折する波について波動方程式を放物線座標を用いて変換しその変換された方程式について厳密解を示した。Schwarschild⁽³⁾ はこの半無限長の直線の先端を回折する波についての Sommerfeld の解を2つ重ね合せて、それに境界条件を満たすような修正項を加えた解を、1902 年に発表した。その後 1952 年に Johnson⁽⁴⁾ はこれらの理論に基づいてよく知られている図表を発表した。著者等は以前に小規模で且つ簡単ではあったが実験を試みたことがあった。その時 Johnson が発表しているような図とは少し異なるような回折をしている場合があることに気がついた。開口部を波浪が通過するときの問題は、船舶の港への出入、或いは防波堤の配置の問題などに関連して、現実の問題としても重要と考えられる。そこで、この問題についてもう少し厳密に考察してみようとして、以前に1つの別法を報告した⁽⁵⁾。その別法とは、Schwarschild のように別の場合の解を2つ重ね合わせるというようなことをしないで、波動方程式を楕円座標を用いて変換して、直接的に、無限に延びた直線上の1ヶ所に開口部のあるときの解を得ようとするのであった。そこで、今回、その式を用いて実際に、いくつかの例について数値解の結果を報告するものとする。なお、問題を簡単にするため、等深と考えた。

長波については、静水面よりの水位上昇高はよく知られているように、(1)式が成立する。

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = g d \nabla^2 \zeta, \quad d: \text{等水深} \quad (1)$$

さらに、 $\zeta = \psi \cdot e^{i\omega t}$ として楕円座標 $x + iy = c \cdot \cosh(\xi + i\eta)$ を用うれば、(2)式となる。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\sigma^2 c^2}{2g d} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \psi = 0 \quad (2)$$

この方程式は変数分離が可能である。このことは方程式を解くときに利用される。そこで、方程式を解くに際して入射波が入ってくる下半面と、開口部を通過してから以後の上半面の2つの部分について考えることにする。

1. 下半面 無限遠方より平面波が、角度 θ で入射してくるものと考えれば、その入射波 ψ_{u1} は、

$$\psi_{u1} = Re \cdot \exp \{ i k c (\cosh \xi \cos \eta \cos \theta + \sinh \xi \sin \eta \sin \theta) \} \quad (3)$$

$$\text{if, } \cosh \xi \cos \theta = P \cos \xi_0, \quad \sinh \xi \sin \theta = P \sin \xi_0, \quad P^2 = \cosh^2 \xi \cos^2 \theta + \sinh^2 \xi \sin^2 \theta \quad (4)$$

$$\psi_{u1} = Re \cdot \exp \{ i k c P - \cos(\xi_0 - \eta) \} = Re \cdot [J_0(kcP) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(kcP) \cos n(\xi_0 - \eta)]$$

$$= J_0(kcP) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(kcP) \cos 2m\xi_0 \cos 2m\eta + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(kcP) \sin 2m\xi_0 \sin 2m\eta \quad (5)$$

防波堤に相当する直線においては、 $(\partial \psi / \partial \eta)_{\eta=0} = 0$ でなければならぬ。そのため、 ψ_{u2} なる関数を新たに加えて、 $\psi_u = \psi_{u1} + \psi_{u2}$ が境界条件を満足するようにすれば、その関数 ψ_u は、

$$\psi_u = \psi_{u1} + \psi_{u2} = J_0(kcP) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(kcP) \cos 2m\xi_0 \cos 2m\eta \quad (6)$$

2. 上半面 上半面すなわち波浪が開口部を通過してから後は、波浪は回折するが、無限遠方に至れば、波浪は消えるであらう。この状況を考え、上半面においては、つぎの関数 ψ_o を仮定する。

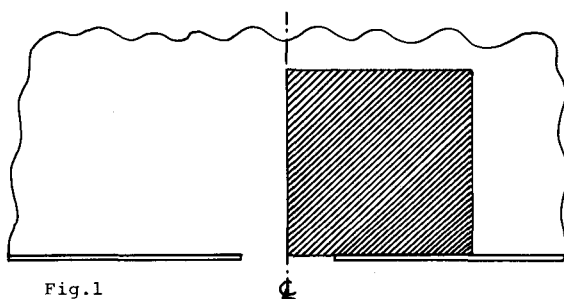


Fig. 1

$$\psi_0 = J_0(kcp) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{-\lambda_m \xi} \cos 2m\eta \quad (7)$$

直線上に沿って、 $(\partial\psi_0/\partial\eta)_{\eta=0} = 0$ ではないが、この条件は満足している。また、上式には、2つの未知係数 B_m と λ_m があるが、 B_m は開口部において、

$$(\psi_0)_{\xi=0} = (\psi_0)_{\xi=20} \quad \text{という条件より}$$

$$B_m = 2(-1)^m J_{2m}(kcp) \cos 2m\xi_0 \quad (8)$$

つぎに、 λ_m であるが、この係数の決定には、変分学の法則を用いることにする。すなわち、

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta} \right)^2 - \frac{\sigma^2 c^2}{2ga} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \psi^2 \right] d\xi d\eta \quad (9)$$

$$= \min$$

この式に、(7)式を代入して、 $\partial I / \partial \lambda_m = 0$ より λ_m を決定すればよい。すなわち、(10)式を解けばよい。

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda_s} = 1 - \frac{8s^2}{\lambda_s^2} + \frac{\lambda_s^2 + 1}{(\lambda_s^2 - 1)^2} g \quad (10)$$

$$g = \sigma^2 c^2 / 2ga, \quad (s = 1, 2, \dots)$$

今回、求めた数値解は、Table 1 に示すデータを用いたものであり、Fig. 1 に示した斜線部分について、入射角 θ が、 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ の場合について、

Fig. 2 から Fig. 4 に等高図を示した。

T = 10 sec
d = 10 m
L = 92.3 m
c = 25 m
$\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

参考文献

Table 1. Data

- (1) Lamb, H. : Hydrodynamics, 6th. Ed. 1959, pp. 553.
- (2) Sommerfeld, A. : Mathematische Theorie der Diffraction, Mathe. Ann. Bd. 47, 1896, S. 317.
- (3) Schwarzschild : Die Beugung und Polarisation des Lichts durch einen Spalt, Mathe. Ann. Bd. 55, 1902.
- (4) Johnson, J.W. : Generalized wave diffraction diagrams, Proc. Second Conf. Coastal Eng., Berkeley, Calif., The Engineering Foundation Council on Wave Research, 1952, pp. 6-23.
- (5) 杉本修一, 西村益夫 : 防波堤開口部を通過する波浪について, 昭和43年土木学会第23回年次学術講演会講演要旨集 pp. 25 ~ 26.

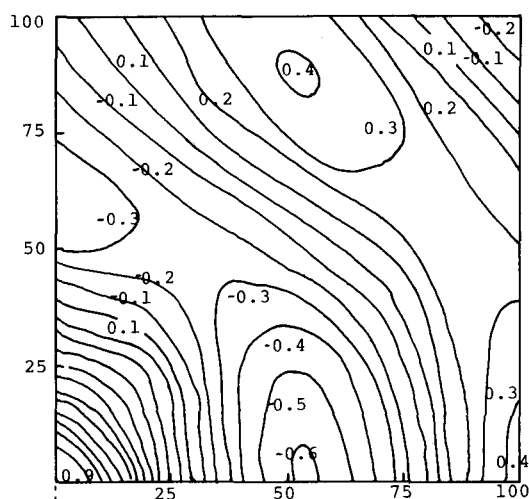


Fig. 2 $\theta = 30^\circ$

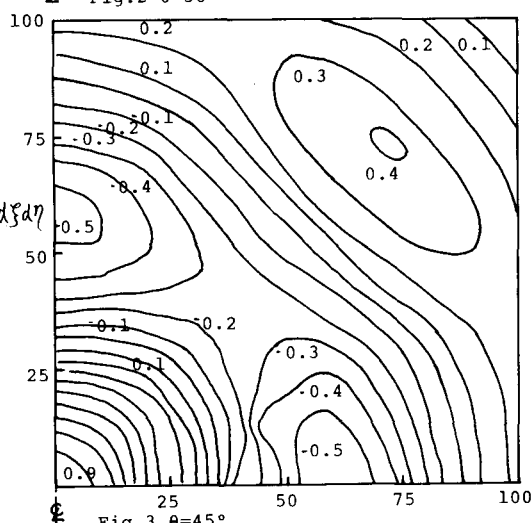


Fig. 3 $\theta = 45^\circ$

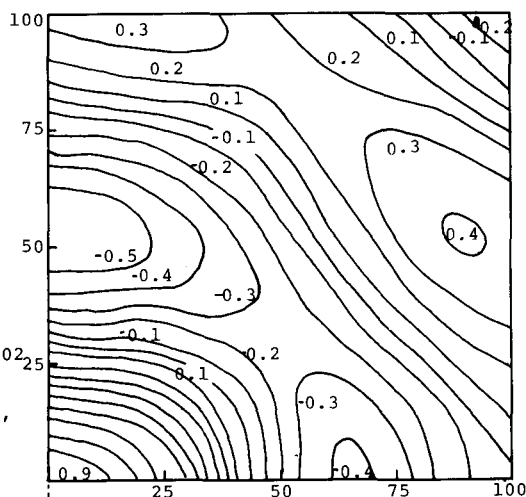


Fig. 4 $\theta = 60^\circ$