

京都大学工学部 正員 平岡 正勝
 京都大学工学部 正員 古市 徹
 京都大学大学院 学生員 田中 宏明

1. はじめに 本研究は、環境システムとしての大気、海洋、河川、地下での汚染物質の拡散現象を把握するに当って、特に乱流拡散現象の数値シミュレーションを行なうことを目的としている。乱流拡散の数値解析を行なう方法として、Fig-1のごとく大きく分けて2つの方法があると考えられる。1つは乱流現象の数式モデルとして知られている移流拡散方程式を解くことにより、間接的にシミュレーションする方法である。もう1つは、微分方程式を介することなく1つの粒子に着目してラグランジュ的な考えで、その乱流運動を直接シミュレーションすることにより拡散問題を解く方法である。間接法としては、有限要素法(FEM)、有限差分法(FDM)、粒子移動法(TPM)などがあり、直接法としてはモンテカルロ法(MCM)が代表的なものとしてあげられる。今回は、FEMを中心として移流項と拡散項の関係(Pe数)、時間差分のとり方、スキームの構成の仕方などに言及して数値解析を試みた結果について報告する。他の方法についてもFEMとの関連において議論し、特に直接法は、MCMと井上の乱子理論⁽¹⁾を組み合わせた日野モデル⁽²⁾を検討した結果について述べたいと思う。

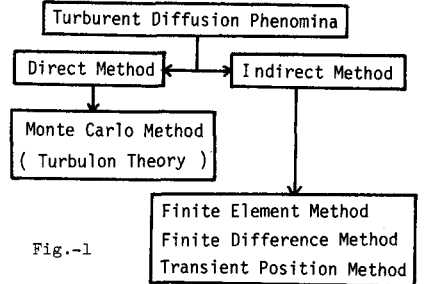


Fig.-1

2. 数値計算の方法 以下の議論においてスキームの比較という観点から、式(1)のような1次元の移流拡散方程式を考える。(A) FEM 定式化にあたっては重み付き残差法(MWR)のガラーキン法によるものとする。重み関数 $W_i(x)$ は式(2)のようにとる。⁽³⁾ α の前の符号はFig-2のように、風が右方向に吹いている時要素(i-1)-iでは+、要素i-(i+1)では-をとるものとする($\alpha=0$ のときは普通のガラーキン法)。時間差分については式(3)のようにとる。空間および時間に関

$$\partial C / \partial t + u \cdot \partial C / \partial x = D \cdot \partial^2 C / \partial x^2, \quad u, D: \text{const.} \quad (1)$$

$$W_i(x) = N_i(x) \pm \alpha \cdot F(x), \quad F(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \times (x-h) \quad (2)$$

$$\beta \cdot (\partial C^{n+1} / \partial t) + (1-\beta) \cdot (\partial C^n / \partial t) = \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t}, \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (3)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot \left\{ (2+3\alpha)C_{i-1}^{n+1} + 8C_i^{n+1} + (2-3\alpha)C_{i+1}^{n+1} - \frac{\alpha}{2} \{ (1+\alpha)C_i^{n+1} - 2\alpha C_i^n + (\alpha-1)C_{i+1}^{n+1} \} \right. \\ \left. - \frac{\alpha}{Pe} \cdot \{ C_{i-1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i+1}^{n+1} \} \right\} \\ = \frac{1}{\Delta t} \cdot \left\{ (2+3\alpha)C_{i-1}^n + 8C_i^n + (2-3\alpha)C_{i+1}^n \right\} + \frac{1-\beta}{\Delta t} \cdot \left\{ (1+\alpha)C_i^n - 2\alpha C_i^{n-1} + (\alpha-1)C_{i+1}^n \right\} \\ + \frac{1-\beta}{Pe} \cdot \{ C_{i-1}^n - 2C_i^n + C_{i+1}^n \},$$

$$F = u \Delta t / h, \quad Pe = u h / D \quad (4)$$

$$C_i^n = V^n \cdot \exp \{ j \cdot k_i \cdot h \}, \quad j=F, k: \text{波数}, V: \text{増幅因子} \quad (5)$$

$$V = \frac{\{ 4Pe(2+3\alpha h) - 12(1+\alpha F)Pe + 2(1-\alpha h) \} - j \cdot [6Pe(2\alpha F - \alpha) \sin k h]}{\{ 4Pe(2+3\alpha h) + 12\beta F(1-\alpha h) + 2(1-\alpha h) \} + j \cdot [6Pe(2\alpha F - \alpha) \sin k h]} \quad (6)$$

$$\alpha \cdot \partial C / \partial t + u \cdot \partial C / \partial x = 0 \quad \text{at } t \leq t \leq t + \Delta t, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \\ (1-\alpha) \cdot \partial C / \partial t = D \cdot \partial^2 C / \partial x^2 \quad \text{at } t + \Delta t \leq t \leq t + 2\Delta t, \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (7)$$

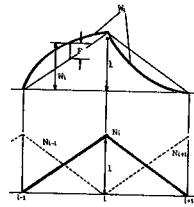


Fig.-2

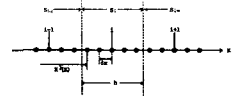


Fig.-3

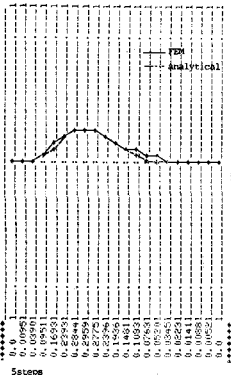
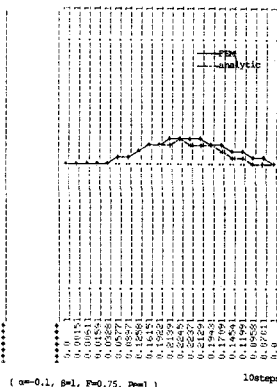


Fig.-4



($\alpha=0.1, \beta=1, F=0.75, Pe=1$)

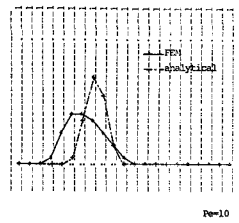
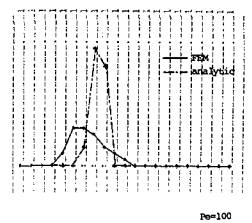


Fig.-5



($\alpha=0.1, \beta=1, F=0.75, Scatope$)

して離散化を行なった結果が式(4)であり、この式を陰解法で解くことにより逐次解を求めることができる。誤差解析のために式(5)のおくと、式(4)に代入することにより V は式(6)のように求まる。安定であるためには $|V| < 1$ である必要がある。

(B) FDM 式(1)を直接差分化する方式と式(7)のように移流項と拡散項を分割した式を差分化する方式の2通りで考える。差分化にはLax-Wendroff, Bella, Frommなどのスキームを用いている。(C) TPM Re 数が大きいときに移流項の離散化誤差をなくすために、区間内の粒子を流速で移動させて拡散項の計算だけ差分計算するように工夫した方法でFig-3に概略図を示してある⁽⁴⁾。(D) MCM本方法はスキームの安定性・収束性・適合性などを考慮する必要がなく、その上拡散場の構造や拡散状況を直接把握できる利点がある。

3. 数値解析の検討

Fig-4にFEMと解析解との比較がある。 α は固上差分的な考えに立つもので定常の場合は安定性解析より正の最適値が求められている。⁽³⁾ 今回の非定常の計算ではヒューリスティックな結果として、負の $\alpha = -0.1$ のときに解析解と良好な一致を示した。正の方が良いという結果があるが、⁽⁵⁾ 今後の検討を要する。時間差分については $\beta = 1.0$ すなわち後退差分の方が安定性が良かった。Fig-5より Re 数が大きくなると解析解との差が大きくなることがわかる。(逆に、Fig-7よりTPMでは Re 数が大きい程近似性が良い。) Fig-6に差分解の比較を示しているが、移流項と拡散項を分割する方法の方が解が安定していることがわかる。MCMについては日野モデルの他に、Fig-8

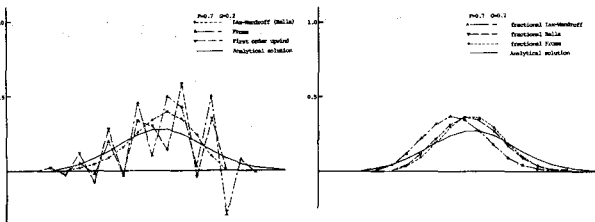


Fig.-6

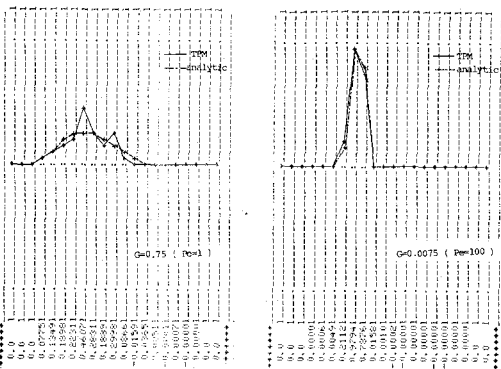


Fig.-7

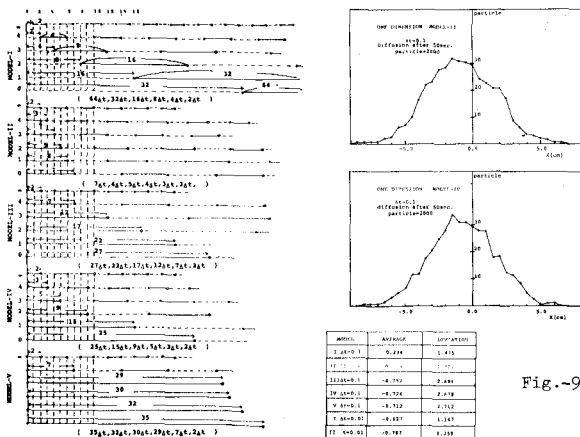


Fig.-9

のように新しく乱子モデルを追加して検討した。Fig-9,10にそれぞれ1次元、2次元のシミュレーション結果を示している。(Fig-11に高速フーリエ変換によるスペクトル解析結果を示す。) 以上各手法の概略のみ記したが、実際のシミュレーションに当っては、物理的条件(Re , F など)や数学的条件(誤差解析など)により手法の特徴を生かした適用がなされるべきであろう。最後に、本研究に御協力いただいた京都大学但生工学教室井上頼輝教授な

らびに前年岡研の左龍孝氏に感謝いたします。

参考文献 (1) 井上, 農林技術研究所報告, A, 42号 (1952), (2) Hino, M., 土木学会論文報告集, No. 123 (1965), (3) Heinrich, J.C., et al., Int. J. num. Meth. Engng., Vol. 11 (1977), (4) 神野, 土木学会論文報告集 No. 271 (1978), (5) 北田, 京都大学論文 (1979).

Fig.-8

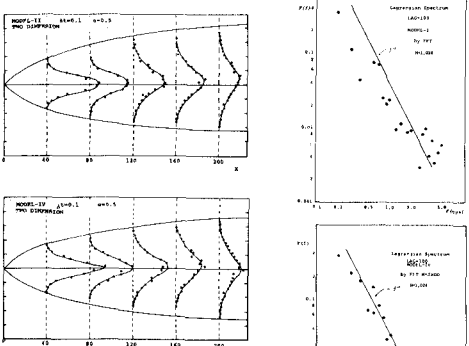


Fig.-10

Fig.-11