

九州大学 工学部 正員 小松 和光
九州大学 工学部 正員 椿 東一郎

1. まえがき

海面上に放出された温排水の拡がりや河口における河川水の拡散問題については積分モデルによる理論的研究が活発に行なわれ、多くの知見が得られている。先に著者らは flow force M_0 , 浮力 flux N_0 が保存されることに着目し、拡散幅や表面浮力、表面流速などの噴流特性量を M_0, N_0 で無次元化した一般的な表示式を得たが、今回新たに積分モーメント法概念に基づく解析を行ない、実験結果をより良く説明できる理論解を得たので報告する。

2. 理論的解析

x 方向、 y 方向の運動方程式および拡散方程式は単位質量あたりの平均浮力を $B = g(\rho_a - \rho)/\rho_a$ とし次のようである。

$$\frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial VU}{\partial y} + \frac{\partial WU}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_z^\infty B dz + \frac{\partial}{\partial y} (K_H \frac{\partial U}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_V \frac{\partial U}{\partial z}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} + \frac{\partial WV}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial y} \int_z^\infty B dz + \frac{\partial}{\partial x} (K_H \frac{\partial U}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_V \frac{\partial V}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{w}^2 - \bar{w}^2) \quad (2)$$

$$\frac{\partial UB}{\partial x} + \frac{\partial VB}{\partial y} + \frac{\partial WB}{\partial z} = -\frac{\partial UB}{\partial y} - \frac{\partial WB}{\partial z} \quad (3)$$

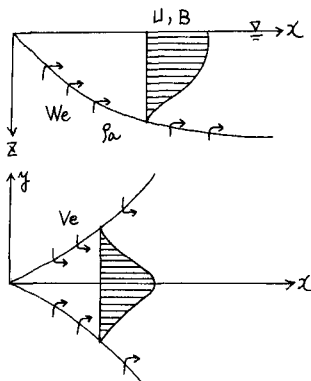


図-1 流れの様式図

$U = U_c f_1(\eta) \cdot f_2(\zeta)$, $B = B_c m_1(\eta) \cdot m_2(\zeta)$, $\eta = y/\delta$, $\zeta = z/h$ (4)
噴流表面拡散幅 δ , 噴流水深 h はそれぞれ B が噴流中心軸上表面浮力 B_c の $1/2$ となる点までの中心軸からの距離で定義する。また、 y 方向の水平連行速度を V_e とすると y 方向の水平連行係数 E を用いて次のように表わされる。
 $V_e = EU_c f_2(\zeta)$ (5)

連続の式を $y = 0 \sim y$, $z = 0 \sim \infty$ の範囲で積分すると若干の計算の後、 $V = V_s f_3(\zeta)$ (V_s は y 方向の表面流速)

として $V = \left\{ \frac{I_2}{I_3} U_c \frac{d\delta}{dx} f_1 - \frac{I_2}{I_1 I_3} EU_c F(\eta) \right\} \cdot f_3(\zeta)$ (6), ここに $I_1 = \int_0^\infty f_1 d\eta$, $I_2 = \int_0^\infty f_2 d\zeta$, $I_3 = \int_0^\infty f_3 d\zeta$, $F(\eta) = \int_0^\eta f_1 d\eta$

と表わされる。決定すべき未知数は U_c, δ, h, E, B_c の5個であり、式(1), (2), (3)を $z=0 \sim \infty, y=0 \sim \infty$ で積分して得られる式および(1)× U , (2)× V を同じく $z=0 \sim \infty, y=0 \sim \infty$ で積分して求めた積分モーメント式が基礎式となるが、ここでは簡単のため h 方向の連行係数 $E = \text{const}$ とする。したがって、 E を規定する式である y 方向の運動方程式(2)の積分形は用いない。また、水平・鉛直方向の運動粘性係数および $\bar{w}^2 - \bar{w}^2$ を次式のようにおく。
 $K_H = K_1 \psi(\eta, Ri) \delta U_c f_1$, $K_V = K_2 \phi(\eta, Ri) h U_c f_1$, $\bar{w}^2 - \bar{w}^2 = K_3 \psi^2(\eta, Ri) U_c^2 f_1^2(\eta) \cdot f_2^2(\zeta)$ (7)
ここに K_1, K_2, K_3 は比例定数。 ψ, ϕ は浮力による乱流構造の変化を表わす関数で、二次元表面密度噴流の解析結果を用いる。また flow force M_0 , 浮力 flux N_0 が保存される流れであることから、噴流特性量を M_0, N_0 を用いて無次元化する。

$$H = \frac{N_0^{\frac{1}{2}} h}{M_0^{\frac{3}{4}}}, \quad \Delta = \frac{N_0^{\frac{1}{2}} \delta}{M_0^{\frac{3}{4}}}, \quad \zeta = \frac{N_0^{\frac{1}{2}} x}{M_0^{\frac{3}{4}}}, \quad \bar{B} = \frac{N_0^{\frac{1}{2}} B_c}{M_0^{\frac{3}{4}} B_c} \quad (8)$$

一方、三次元表面密度噴流における overall Richardson 数として、 $Ri = N_0 / (z \delta U_c^2)$ を導入すると(1)式, (3)式の積分は(8)式を用いてそれぞれ次のように表わされる。

$$\Delta^{\frac{1}{3}} H = \frac{r_1 R_c^{\frac{1}{3}}}{1 + r Ri} \quad \dots \dots \dots (9) \quad \bar{B} = r_0 \frac{\Delta^{\frac{1}{3}} R_c^{\frac{1}{3}}}{1 + r Ri} \quad \dots \dots \dots (10)$$

同様式(1)×U, 式(2)×Vの積分は式(6),(8)を用いて次のように表わされる。

$$\frac{d}{d\zeta} \left[\frac{H}{Ri} \right] = -r_2 \frac{dH}{d\zeta} + r_3 Ri H \Delta \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{1}{Ri \Delta} \right] - r_4 \frac{H \Delta d}{\Delta d\zeta} - r_5 K_1 \overline{\Psi}_1(Ri) \frac{1}{Ri \Delta} - r_6 K_2 \overline{\Psi}_1(Ri) \frac{1}{Ri} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & r_7 \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{H}{Ri} \left(\frac{d\Delta}{d\zeta} \right)^2 \right] - r_8 \frac{d}{d\zeta} \left[E \frac{H}{Ri} \left(\frac{d\Delta}{d\zeta} \right) \right] + r_9 \frac{d}{d\zeta} \left[E^2 \frac{H}{Ri} \right] - E^3 \frac{H}{Ri \Delta} \\ &= r_{10} \frac{H \Delta d}{\Delta d\zeta} - r_{11} E \frac{H}{\Delta} + r_{12} K_1 \overline{\Psi}_2(Ri) \frac{H}{Ri} \left(\frac{d\Delta}{d\zeta} \right) \\ &- r_{13} K_1 \frac{d}{d\zeta} \left[\overline{\Psi}_2(Ri) E \frac{H}{Ri} \right] - r_{14} K_1 \overline{\Psi}_2(Ri) \frac{\Delta^{\frac{1}{2}} H}{Ri^{\frac{1}{2}} d\zeta} \left[\frac{1}{Ri \Delta^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{d\Delta}{d\zeta} \right) \right] \\ &+ r_{15} K_1 \overline{\Psi}_4(Ri) \frac{H}{Ri \Delta} \left(\frac{d\Delta}{d\zeta} \right)^2 + r_{16} K_1 \overline{\Psi}_4(Ri) \frac{1}{Ri} \frac{d\Delta}{d\zeta} \frac{dH}{d\zeta} \\ &+ r_{17} K_1 \overline{\Psi}_3(Ri) \frac{\Delta^{\frac{1}{2}} H}{Ri^{\frac{1}{2}} d\zeta} \left[\frac{E}{Ri \Delta^{\frac{1}{2}}} \right] - r_{18} K_1 \overline{\Psi}_2(Ri) \frac{E H \Delta d}{Ri \Delta d\zeta} - r_{19} K_1 \overline{\Psi}_2(Ri) \frac{E dH}{Ri d\zeta} \\ &+ r_{20} K_2 \overline{\Psi}_3(Ri) \frac{H \Delta d}{Ri \Delta d\zeta} - r_{21} K_2 \overline{\Psi}_3(Ri) \frac{E H}{Ri \Delta} - r_{22} K_2 \overline{\Psi}_4(Ri) \frac{1}{Ri} \left(\frac{d\Delta}{d\zeta} \right)^2 \\ &+ r_{23} K_2 \overline{\Psi}_4(Ri) \frac{E}{Ri} \frac{d\Delta}{d\zeta} - r_{24} K_2 \overline{\Psi}_4(Ri) \frac{E^2}{Ri} \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、 $r_1 \sim r_{20}$ は $f_1 = e^{-0.997\eta^2}$, $f_2 = f_3 = e^{-0.937\eta^2}$, $m_1 = e^{-0.693\eta^2}$, $m_2 = e^{-0.693\eta^2}$ のGauss型を仮定することにより求まる定数である。 $\overline{\Psi}(Ri)$ および $\Psi(Ri)$ も中, 中により表わされる既知の関数である。上の諸式で $Ri \rightarrow 0$ の極限が均一流体の表面噴流である。均一流体の場合の諸量に*をつけて表わすと permanent type であるための条件から指数の値が求まり、それぞれ $H_* = \Delta_*$, $\Delta_* = \Delta_*$, $Ri_* = \Delta_*^2$, $\overline{B} = \Delta_*$, $E = E_* = 0.058$ となる。係数 $a_1 \sim a_4$ は上式を式(9)~(12)に代入した式から計算される。

3. 数値計算と実験結果との比較

仮想原点 $\zeta=0$ に表面密度噴流の point source が存在するとして、境界条件 $\zeta=0$ で $H=\Delta=Ri=\overline{B}=0$, $E=E_*=0.058$, $d\Delta/d\zeta=a_2$ のもとに式(9)~(12)の連立常微分方程式をとく。 $\overline{B}$, H , Δ の計算結果を図2~4に示す。これらの理論曲線は $\zeta=0$ において均一流体の式(13)に接し、 ζ が増すとともに寄力の影響が表れてくる。Jen, Wiegel, Mobarek, Tamai, Wiegel, Tornbergおよび著者らの実験結果も併せて記しているが、良く一致している。また point source とはみなしにくい出口での Richardson 数 Ri_o が比較的大きい場合の数値計算の結果を図-3に示す。 Ri_o の影響を受けるのは出口付近のみに限られ、

その後は point source の場合の解に収束している。図-2, 4にはやはり Ri_o の比較的大きいPandeや林の実験結果も記しているがほぼ一致しており、図-2~4を用いることにより任意の出口条件の表面噴流に対し、容易に噴流特性量を評価することができ、実用性意義も大きいものと思われる。

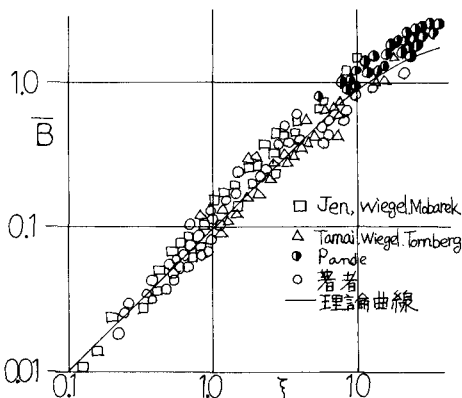


図-2 表面浮力 $\overline{B}$ と ζ の関係

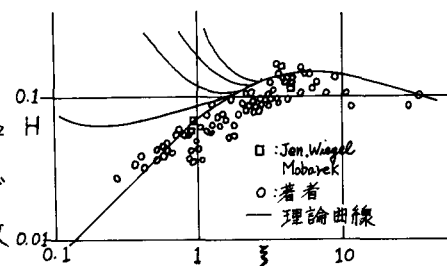


図-3 噴流水深Hと ζ との関係

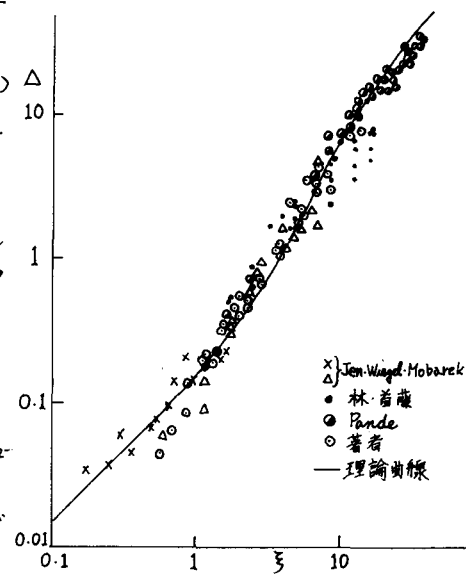


図-4 噴流幅 Δ と ζ との関係