

中央大学 正員 川原睦人
○ 中央大学大学院 学生員 坪田幸司

1. まえがき

比較的、流出量の多い河口付近では、海洋と河川との密度差によって生じる流れの変化を無視しえない場合がある。ここでは、この密度差による流れの変化を有限要素法を用いて解析を試みた。著者らは、過去において、定常問題として、この密度流を扱ってきた。しかし、定常状態と考えて、密度勾配を、運動方程式に取り込むと、計算過程が、不安定となり、各係数の選ぶ方によって、異った解を得るなどの不都合が生じた。また、自由度の数が多くなることにより、定常状態で解析するには、コンピューターのメモリ領域が非常に多く必要となる。そのうえ、非線形計算を行う為や、係数を徐々に定常の値に近づける為、何回もくり返し計算を行なわねばならない。以上の理由から、非定常問題として密度流を取り扱うことにした。

2. 基礎式 塩分濃度の相異による密度の相量を考えることにする。塩分濃度は、水平方向に対しては、その分布を考えるものとし、鉛直方向に対しては、二層流として扱うことにする。浅海長波の仮定をもちい、方程式は、添字記法、総和規約で示す。

上層流 ・運動方程式
$$\frac{\partial u_i^u}{\partial t} + u_i^u u_{i,i} + g \zeta_{,i} + \frac{\rho_0^u r g}{2 R_u} (\zeta + d) S_{,i}^u - \frac{A \ell}{(\zeta + d)} (u_{i,i}^u + u_{i,i}^l) - (T_u^S - T_u^B) = 0$$

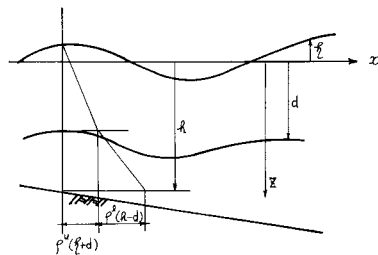
・連続方程式
$$\frac{\partial}{\partial x} (\zeta + d) + \{ (\zeta + d) u_i^u \}_{,i} = 0$$

・拡散方程式
$$\frac{\partial S_i^u}{\partial x} + u_i^u S_{,i}^u - (K_{ij} S_{,j}^u)_{,i} = 0$$

下層流 ・運動方程式
$$\frac{\partial u_i^l}{\partial t} + u_i^l u_{i,i} + g \frac{\zeta + d}{R_l} \rho_0^u r S_{,i}^u + g \frac{R_u}{R_l} \zeta_{,i} + \frac{1}{2} \frac{\rho_0^u}{R_l} g r (R - d) S_{,i}^l + g \frac{R u - R_l d}{R_l} d_{,i} - \frac{A \ell}{(R - d)} (u_{i,i}^l + u_{i,i}^u) - (T_l^S - T_l^B) = 0$$

・連続方程式
$$\frac{\partial}{\partial x} (R - d) + \{ (R - d) u_i^l \}_{,i} = 0$$

・拡散方程式
$$\frac{\partial S_i^l}{\partial x} + u_i^l S_{,i}^l - (K_{ij} S_{,j}^l)_{,i} = 0$$



記号 u : 流速 g : 重力加速度 ρ_0^u : 上層に与えられた基本濃度 S^u : 上層各点での濃度の割合
 h : 水深 $A \ell$: 渦動粘性係数 ρ_0^l : 下層に与えられた基本濃度 S^l : 下層各点での濃度の割合
 d : 上層厚 r : 最大密度差 K_{ij} : 各方向の拡散係数 ζ : 水位上昇
 R^u : $R^u = \rho_0^u (1 + r S^u)$ R^l : $R^l = \rho_0^l (1 + r S^l)$

T_u^S : 海面摩擦による抵抗 (風など) T_u^B : 上層と下層との抵抗 T_l^S : 海底摩擦による抵抗

u_i^u : 上層流速 α : 上層下層間の摩擦係数

u_i^l : 下層流速 β : 海底摩擦係数

と示す。丁は次式で示される

$$T_u^B = T_l^S = \frac{\alpha}{R_u (\zeta + d)^2} (u_i^u - u_i^l) \{ (u_i^u - u_i^l)^2 + (u_j^u - u_j^l)^2 \}^{\frac{1}{2}} \quad T_l^B = \frac{\beta}{R_l (R - d)^2} u_i^l (u_i^l - u_i^u)^{\frac{1}{2}}$$

3. 有限要素法

形状関数は、各未知数 u (流速), ζ (水位上昇), S (濃度), に対して、三角形三節点の一次要素を用いる。各方程式に、重みを乗じて、領域で積分を行う。さらに時間方向に対しては、二段階ラックス-ウエンドロッフ法で近似する。 $u_{i1} = \bar{u}_i u_{i1}$, $\zeta_n = \bar{\zeta}_n \zeta_n$, $d = \bar{d} d$, 各方程式は、次式の様に変えられる。

第一段階

$$\begin{aligned}\bar{M}_{\beta i} u_{\beta i}^{n+1/2} &= M_{\beta i} u_{\beta i}^n - \frac{\Delta t}{2} \{ K_{\beta \beta i} u_{\beta i}^n u_{\beta i}^n + g B_{\beta i} \zeta_{\beta}^n + K_{\beta \beta i} \frac{P_{\beta}^u r_{\beta}^g}{2 R_u} (d_{\beta}^n + \zeta_{\beta}^n) S_{\beta}^n + C_{\beta \beta i} u_{\beta i}^n + T_{\beta u} \} \\ \bar{M}_{\beta i} s_{\beta}^{n+1/2} &= M_{\beta i} s_{\beta}^n - \frac{\Delta t}{2} \{ K_{\beta \beta i} s_{\beta}^n u_{\beta i}^n + D_{\beta \beta} s_{\beta}^n \} \\ \bar{M}_{\beta i} \zeta_{\beta}^{n+1/2} &= M_{\beta i} \zeta_{\beta}^n - \frac{\Delta t}{2} \{ K_{\beta \beta i} (\zeta_{\beta}^n + d_{\beta}^n) u_{\beta i}^n \} + M_{\beta i} (d_{\beta}^{n+1/2} - d_{\beta}^n) \\ \bar{M}_{\beta i} u_{\beta i}^{n+1/2} &= M_{\beta i} u_{\beta i}^n - \frac{\Delta t}{2} \{ K_{\beta \beta i} u_{\beta i}^n u_{\beta i}^n + g \frac{R_u}{R_{\beta}} B_{\beta i} \zeta_{\beta}^n + \frac{R_u - R_{\beta}}{R_{\beta}} B_{\beta i} d_{\beta}^n + \frac{r_{\beta}^g P_{\beta}^u}{R_{\beta}} K_{\beta \beta i} (\zeta_{\beta}^n + d_{\beta}^n) S_{\beta}^n + \frac{r_{\beta}^g g}{2 R_{\beta}} K_{\beta \beta i} (R_{\beta} - d_{\beta}^n) + C_{\beta \beta i} u_{\beta i}^n + T_{\beta u} \} \\ \bar{M}_{\beta i} s_{\beta}^{n+1/2} &= M_{\beta i} s_{\beta}^n - \frac{\Delta t}{2} \{ K_{\beta \beta i} s_{\beta}^n u_{\beta i}^n + D_{\beta \beta} s_{\beta}^n \} \\ \bar{M}_{\beta i} d_{\beta}^{n+1/2} &= M_{\beta i} d_{\beta}^n - \frac{\Delta t}{2} \{ K_{\beta \beta i} (R_{\beta} - d_{\beta}^n) u_{\beta i}^n \}\end{aligned}$$

第二段階

$$\begin{aligned}\bar{M}_{\beta i} u_{\beta i}^{n+1} &= M_{\beta i} u_{\beta i}^n - \Delta t \{ K_{\beta \beta i} u_{\beta i}^{n+1/2} u_{\beta i}^{n+1/2} + g B_{\beta i} \zeta_{\beta}^{n+1/2} + K_{\beta \beta i} \frac{P_{\beta}^u r_{\beta}^g}{2 R_u} (d_{\beta}^n + \zeta_{\beta}^{n+1/2}) S_{\beta}^{n+1/2} + C_{\beta \beta i} u_{\beta i}^n + T_{\beta u} \} \\ \bar{M}_{\beta i} s_{\beta}^{n+1} &= M_{\beta i} s_{\beta}^n - \Delta t \{ K_{\beta \beta i} s_{\beta}^{n+1/2} u_{\beta i}^{n+1/2} + D_{\beta \beta} s_{\beta}^n \} \\ \bar{M}_{\beta i} \zeta_{\beta}^{n+1} &= M_{\beta i} \zeta_{\beta}^n - \Delta t \{ K_{\beta \beta i} (\zeta_{\beta}^{n+1/2} + d_{\beta}^{n+1/2}) u_{\beta i}^{n+1/2} \} + M_{\beta i} (d_{\beta}^{n+1} - d_{\beta}^{n+1/2}) \\ \bar{M}_{\beta i} u_{\beta i}^{n+1} &= M_{\beta i} u_{\beta i}^n - \Delta t \{ K_{\beta \beta i} u_{\beta i}^{n+1/2} u_{\beta i}^{n+1/2} + g \frac{R_u}{R_{\beta}} B_{\beta i} \zeta_{\beta}^{n+1/2} + \frac{R_u - R_{\beta}}{R_{\beta}} B_{\beta i} d_{\beta}^n + \frac{r_{\beta}^g P_{\beta}^u}{R_{\beta}} K_{\beta \beta i} (\zeta_{\beta}^{n+1/2} + d_{\beta}^{n+1/2}) S_{\beta}^{n+1/2} + \frac{r_{\beta}^g g}{2 R_{\beta}} K_{\beta \beta i} (R_{\beta} - d_{\beta}^{n+1/2}) + C_{\beta \beta i} u_{\beta i}^n + T_{\beta u} \} \\ \bar{M}_{\beta i} s_{\beta}^{n+1} &= M_{\beta i} s_{\beta}^n - \Delta t \{ K_{\beta \beta i} s_{\beta}^{n+1/2} u_{\beta i}^{n+1/2} + D_{\beta \beta} s_{\beta}^n \} \\ \bar{M}_{\beta i} d_{\beta}^{n+1} &= M_{\beta i} d_{\beta}^n - \Delta t \{ K_{\beta \beta i} (R_{\beta} - d_{\beta}^{n+1/2}) u_{\beta i}^{n+1/2} \}\end{aligned}$$

記号

$$\begin{aligned}M_{\beta i} &= \int_V \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_i dV & K_{\beta \beta i} &= \int_V \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_i dV & B_{\beta i} &= \int_V \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_i dV & C_{\beta \beta i} &= A \int_V (\bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_i + \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_i) dV \\ D_{\beta \beta} &= K_{\beta \beta} \int_V \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_i dV & T_{\beta u} &= J_u^S - J_u^B & T_{\beta \beta} &= J_{\beta}^S - J_{\beta}^B & K_{\beta \beta i} &= \int_V \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_i dV + \int_V \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_i dV\end{aligned}$$

4. 数値計算

下図右の様なモデルにおいて、節点10とその両隣の節点に、上層では $S=0.0$ 、下層では、 $S=0.1$ 、 $d=2.5$ m を与え、壁の条件以外の周囲には、上層では $S=0.9$ 、下層では $S=1.0$ 、 $d=0.5$ m を与えた。すなわち濃度差だけによる流れの状態を求めた。結果は下表に示されるように、水位上昇以外は、定常状態に達した。上層厚は下図左に示す。A-A とは A-A 断面での上層厚の変化を示してある。なお $\alpha=0.002$ 、 $\beta=0.02$ 、 $g=9.8$ m/s²、 $k_{\beta}=10$ t=0.03 g/cm³、 $\rho_{\beta}^u=\rho_{\beta}^l=1.0$ 、 $A_{\beta}=10$ m/s、 $\Delta t=0.05$ sec、とした。上層厚の存在しない領域をふくんだり、水深が極端に変化する根元領域では、この方法では計算が不安定になる場合がある。

