

京都大学大学院 学生員 ○吉田 英信
 京都大学工学部 正 員 岩佐 義朗
 京都大学工学部 正 員 井上 和也

1. はじめに 本報はこれまで一次元不定流解析にしばしば適用されてきた特性曲線法を平面二次元流れの場合に拡張するとともに、琵琶湖南湖を対象として特性曲線法による湖流の解析も行ない、前報で述べた方法との比較検討を加えながら、その適用性を明らかにしようとしたものである。

2. 基礎式およびその特性曲線表示 ここでは前報と同様に二次元一層モデルを適用するものとする(図1)。すなわち、

$$\text{連続式: } L_1 \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial D}{\partial x} + v \frac{\partial D}{\partial y} + D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\text{運動方程式: } L_2 \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - A_x = 0 \quad (2)$$

$$L_3 \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - A_y = 0 \quad (3)$$

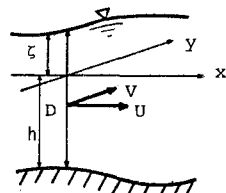


図1

である。ただし、記号は図1に示すとおりで、 A_x, A_y はそれぞれx, y方向の外力項であり、前報と同様の表示によることとする。つぎに基礎式の特性曲線表示を行なうにあたり、基礎式をつぎのように行列表示する。すなわち、

$$L \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \begin{pmatrix} u & D & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \begin{pmatrix} v & 0 & D \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \begin{pmatrix} u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \\ -A_x \\ -A_y \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

である。便宜上、 $\mathbf{u} = (u, u_x, u_y)^T = (\zeta, u, v)^T$ なるベクトル表示を用いている。ここで、 $C: \phi(x, y, t) = 0$ なる曲面上で $\mathbf{u}$ の値が初期値として与えられているとすると、 $L[\mathbf{u}]$ に ϕ を乗じ、后干の式の変形を加えることにより、

$$\phi_t L[\mathbf{u}] = A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + B = 0 \quad (5)$$

がえられる。ただし、 B は曲面 C 上の内微分からなるベクトルであり、また行列 A ;

$$A = \begin{pmatrix} \phi_t + u \phi_x + v \phi_y & D \phi_x & D \phi_y \\ g \phi_x & \phi_t + u \phi_x + v \phi_y & 0 \\ g \phi_y & 0 & \phi_t + u \phi_x + v \phi_y \end{pmatrix} \quad (6)$$

は特性行列とよばれる。 $|A| \neq 0$ ならば式(5)によって $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ が一意的に決せられ、またその結果 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ も一意的に決せられる。一方、 $|A| = 0$ の場合は $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ が一意的に決定されず、 $\phi = 0$ が特性曲面となる。このとき、

$$|A| = (\phi_t + u \phi_x + v \phi_y) \{ (\phi_t + u \phi_x + v \phi_y)^2 - C^2 (\phi_x^2 + \phi_y^2) \} = 0 \quad (7)$$

(ただし、 $C = \sqrt{gD}$) より特性曲面として以下の2つの型をもつことが知られる。

$$(i) \text{第1種特性曲面: } (\phi_t + u \phi_x + v \phi_y)^2 - C^2 (\phi_x^2 + \phi_y^2) = 0 \quad (8)$$

この場合、Mongeの錐を考えることにより、

$$\left(\frac{dx}{dt} - u \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - v \right)^2 = C^2 \quad (9)$$

がえられる。特性曲面は図2のような擬円錐となる。

$$(ii) \text{第2種特性曲面: } \phi_t + u \phi_x + v \phi_y = 0 \quad (10)$$

この場合、特性曲面はMongeの束を形成し、その軸は流線ベクトルである(図3)。

つぎに、 $|A| = 0$ のときは、 $L A = 0$ を満たすベクトル $\mathbf{l}$ (≠0)が存在する。すなわち、

(i) 第1種特性曲面について: ベクトル $\mathbf{l}$ として、 $\mathbf{l} = (1, \frac{C}{g} \cos \theta, \frac{C}{g} \sin \theta)$ がえられる

(ただし、 θ は $\mathbf{l}$ をxy-平面に投影したベクトルがx軸となす角である)。そして、

式(4)を $\mathbf{l}$ によつて線形結合した $\mathbf{l} L[\mathbf{u}] = 0$ から、

$$\begin{aligned} & \frac{D \zeta}{D t} + \frac{C}{g} \cos \theta \frac{D u}{D t} + \frac{C}{g} \sin \theta \frac{D v}{D t} \\ &= \frac{C}{g} (A_x \cos \theta + A_y \sin \theta) - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{C^2}{g} (\sin \theta \frac{D u}{D t} - \cos \theta \frac{D v}{D t}) \end{aligned} \quad (11)$$

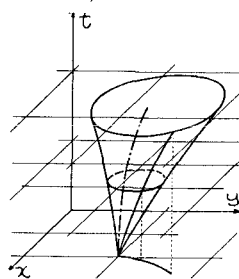


図2

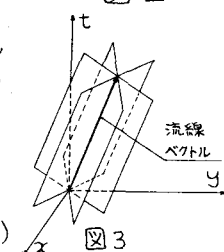


図3

のようにえられる。ここで、 $\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + (u + C \cos \theta) \frac{\partial \phi}{\partial x} + (v + C \sin \theta) \frac{\partial \phi}{\partial y}$ および、 $\frac{D}{Dt} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}$ であり、ともに第1種特性曲面上の微分である。

(ii) 第2種特性曲面について：ベクトル ℓ として、 $\ell = (0, -\sin \theta', \cos \theta')$ がえられる。ここで θ' は曲面 $\phi = 0$ 上にたてた法線ベクトル ℓ を xy -平面に投影したベクトル (ϕ_x, ϕ_y) が x 軸となす角である。微分演算子 $\frac{D}{D\theta} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ および $\frac{D}{D\theta} = -\sin \theta' \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta' \frac{\partial}{\partial y}$ を用いることにより、 $\ell L(u) = 0$ は、

$$-\sin \theta' \frac{\partial u}{\partial t} + \cos \theta' \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{D\zeta}{D\theta} + A_x \sin \theta' - A_y \cos \theta' = 0 \quad (12)$$

となる。式(12)もまた第2種特性曲面上の内微分のみで構成されていることがわかる。

3. 基礎式の差分化 波面の接線方向の微分 $\frac{D}{D\theta}$ を消去するため、 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ の4方向の第2種特性曲線に沿って式(11)を差分化し、また第2種特性曲面内の関係式(12)は用いず「連続式(1)を差分化する方法」とした(図4)。すなわち、

$$\begin{aligned} (\zeta_P - \zeta_R) - \frac{C_0}{g} (u_P - u_R) &= \left[-\frac{C_0}{g} A_x - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{C_0}{g} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \Delta t \\ (\zeta_P - \zeta_U) - \frac{C_0}{g} (v_P - v_U) &= \left[-\frac{C_0}{g} A_y - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{C_0}{g} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \Delta t \\ (\zeta_P - \zeta_L) + \frac{C_0}{g} (u_P - u_L) &= \left[\frac{C_0}{g} A_x - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{C_0}{g} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \Delta t \\ (\zeta_P - \zeta_D) + \frac{C_0}{g} (v_P - v_D) &= \left[\frac{C_0}{g} A_y - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{C_0}{g} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \Delta t \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{および } (\zeta_P - \zeta_S) = \left[-\frac{C_0}{g} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] \Delta t$$

であり、添字は図4の各点における値であることを示している。ここで必要となる点 R, U, D および S における値はまわりの格子点における値から内挿して求められる。以上から点 P の流速および水位は次式から求めることができる。

$$\begin{aligned} u_P &= \frac{u_R + u_L}{2} - \frac{g}{2C_0} (\zeta_R - \zeta_L) + (A_x)_P \Delta t \\ v_P &= \frac{v_U + v_D}{2} - \frac{g}{2C_0} (\zeta_U - \zeta_D) + (A_y)_P \Delta t \\ \zeta_P &= \frac{1}{2} (\zeta_R + \zeta_L + \zeta_U + \zeta_D) - \frac{C_0}{2g} (u_R - u_L + v_U - v_D) - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right)_P \Delta t \end{aligned} \quad (14)$$

また、 u, v は C に比べ無視しうるとして点 S は点 O 上にあるものとし、さらに計算上水量の連続性を保つため流量フラックスで内挿値を求めたのち流速に変換する手続をとった。

4. 琵琶湖潮潮への適用および従来の方法との比較 格子分割、境界条件その他については

前報と同様とした。琵琶湖南湖での卓越風向の一つである北東風の場合の流速ベクトル図が図5である。前報でみられた環流はあらわれず、南端での流速が直接その東北の点に伝わ

っていく傾向がみられる。つぎに計算ステップ数と、南湖北端で通過する流量との関係も前報の結果とともに示したのが図6である。琵琶湖を観

測されている4時間周期の静振がいずれの場合にもみられるが、今回の

結果においてかなり減衰が早いことがうかがわれる。そこで、内挿を考

慮した上で式(14)を書き換えると、

$$\begin{aligned} (u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{k+1} - u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k) / \Delta t &= \frac{C}{2} (u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k - 2u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k + u_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k) / \Delta S - (\zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k - \zeta_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k) g / (2\Delta S) + A_x^k u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \\ (v_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{k+1} - v_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k) / \Delta t &= \frac{C}{2} (v_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k - 2v_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k + v_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^k) / \Delta S - (\zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k - \zeta_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^k) g / (2\Delta S) + A_y^k v_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \\ (\zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{k+1} - \zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k) / \Delta t &= \frac{C}{2} \left\{ (\zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k - 2\zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k + \zeta_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k) / \Delta S + (\zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k - 2\zeta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k + \zeta_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^k) / \Delta S \right\} \\ &\quad - \frac{C}{2} \left\{ (u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k - u_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k) / (2\Delta S) + (v_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k - v_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^k) / (2\Delta S) \right\} - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^k \end{aligned} \quad (15)$$

となる。前報の差分式と比較すれば、各式右辺第1項に拡散に対処する項が含まれており、この項の影響により式(14)による計算では減衰が早くなっていると考えられる。

5. むすび 特性曲線法による平面二次元流れの解析は一応可能になったが、二次元流れの場合は特性曲面上の2つ以上の方向の微分が含まれる結果、理論的にもあるいは数値計算に適用する上でも、一次元流れの場合と比べ多くの障害が生じるといえる。今後これらの点についてさらに詳しく検討を進めたい。

《参考文献》1) 岩佐ら, 第32回年講 II-139, 1977 2) J.M. Tawson: An application of the method of characteristics to tidal calculations in (x-y-t) space, Jour. of Hydraul. Res., IAHR, Vol. 12, 1974

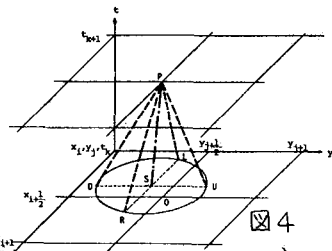


図4

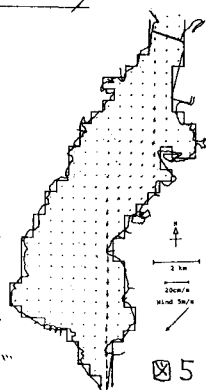


図5

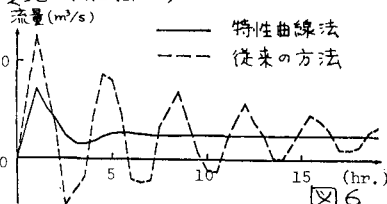


図6