II-109　グリーン関数による河川水温の解析

北見工業大学　正員　佐渡公明

1. まえがき

河川水温は，河川水の熱収支を表わす熱収支方程式を解くことにより求められる。本報告では，Fick の乱流拡散の方程式から出発して水深方向の平均水温で表わした熱収支方程式を導き，次に水面における熱フラックスを水温の一次関数で表わし，河床の伝導熱量を考慮した水温の解析解をグリーン関数を用いて求めるものである。最後に地表水の水温にとって重要な意味をもつ平衡水温について若干の考察を述べる。

2. 平均水温で表わした熱収支方程式

河川水温θに関する次の乱流拡散方程式を考える。x，zは流れ方向，水深方向の座標，uは流速，Kは渦拡散係数すなわち渦温度伝導率である。

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\quad\text{------}(1)$$

(1)式をzに関して水面から水深hまで積分し，$\bar\theta=\int_0^h\theta dz/h$，$\bar u=\int_0^h u\,dz/h$とおけば次のようになる。

$$\frac{\partial\bar\theta}{\partial t}+\bar u\frac{\partial\bar\theta}{\partial x}=K_x\frac{\partial^2\bar\theta}{\partial x^2}+\frac{Q_s+Q_b}{c\rho h}\quad\text{--------}(2)$$

ここに，$Q_s=-c\rho K_z\left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=0}$（水面における熱フラックス），$Q_b=c\rho K_z\left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=h}$（河床伝導熱量），$c$；比熱，$\rho$：密度，$Q_s$と$Q_b$は水塊への加熱を正とする。さて，$Q_s=Q_0-Q_1\bar\theta$と線形近似を仮定し

$\alpha=\frac{Q_1}{c\rho h}$，$\bar\theta^*=\frac{Q_0+Q_b}{Q_1}$　とおけば　$$\frac{Q_s+Q_b}{c\rho h}=\alpha(\bar\theta^*-\bar\theta)\quad\text{--------}(3)$$

が成立し，式(2)より$\partial\bar\theta/\partial t=\partial\bar\theta/\partial x=0$のとき$\bar\theta=\bar\theta^*$となり，$\bar\theta^*$は平衡水温，$\alpha$は熱交換係数である。(3)式を(2)式に代入すれば，結局平均水温で表わした熱収支方程式は次の放物型となる。

$$L[\bar\theta]=K_x\frac{\partial^2\bar\theta}{\partial x^2}-\bar u\frac{\partial\bar\theta}{\partial x}-\frac{\partial\bar\theta}{\partial t}-\alpha\bar\theta=-\alpha\bar\theta^*\quad\text{-------}(4)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{境界条件} & x=0\text{で}\ \bar\theta=h(t)\\ & x\to\infty\text{で}\ \bar\theta=\text{有限}\\ \text{初期条件} & t=0\text{で}\ \bar\theta=f(x)\end{array}\right\}\quad\text{----}(5)$$

(4)式の随伴偏微分表式を$M[v]$とすれば

$$M[v]=K_x\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial(\bar u v)}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial t}-\alpha v\quad\text{-----}(6)$$

であり，$L[\bar\theta]\neq M[v]$となり$L[\bar\theta]$は自己随伴形でない。

3. グリーン関数による解

グリーン関数を$G(\xi,\tau;x,t)$とし，図－1の領域Dにわたる$GL[\theta]$の積分はグリーンの公式を使って

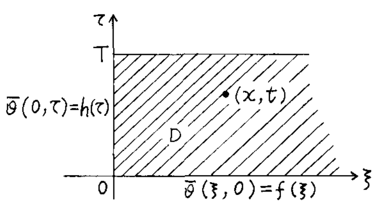
$$\int_0^T\int_0^\infty G(\xi,\tau;x,t)L[\bar\theta]\,d\xi d\tau=-\int_0^T\left.\left(K_x\bar\theta_\xi G-K_x\bar\theta G_\xi-\bar u\bar\theta G\right)\right|_{\xi=0}d\tau$$

$$+\int_0^\infty\bar\theta G|_{\tau=0}d\xi-\int_0^\infty\bar\theta G|_{\tau=T}d\xi+\int_0^T\int_0^\infty\bar\theta M[G]\,d\xi d\tau\quad\text{----}(7)$$

となる。いま，$M[G]=\delta(\xi-x)\,\delta(\tau-t)$　(8)

$\xi=0$で$G=0$，　$\tau>t$で$G=0$　(9)

が成立するならば，(7)式は(5)式の条件より次の(10)式となる。よって，(4)式を(5)式の条件で解くことは，(8)式を(9)式の条件で



図－1

解いたGを(10)式に代入して$\bar{\theta}$を求めることと同等である。

$$\bar{\theta}(x,t) = -\int_0^t\int_0^\infty G(\xi,\tau;x,t)\,\alpha\bar{\theta}^*\,d\xi d\tau - \int_0^t h(\tau)K_x G_\xi(0,\tau;x,t)\,d\tau$$
$$-\int_0^\infty f(\xi)\,G(\xi,0;x,t)\,d\xi \quad \text{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -} (10)$$

(4)式は自己随伴形でないため,(8)式から満足すべき解は得られない。この場合波動方程式の因果律と同じく随伴グリーン関数G^*を用いればよい。G^*は(7)式において $\bar{\theta}=G^*(\xi,\tau;x,t)$ としたとき,次式を満足しなければならない。 $L[G^*(\xi,\tau;x,t)] = \delta(\xi-x)\delta(\tau-t)$ ------- (11)

$\xi=0$ で $G^*=0$, $\tau=0$ で $G^*=0$ ------- (12)

(11)式にτに関するラプラス変換をすると $K_x\bar{G}^*_{\xi\xi} - \bar{u}\bar{G}^*_\xi - (s+\alpha\bar{\theta}^*)\bar{G}^* = e^{-st}\delta(\xi-x)$ ------ (13)

(13)式の解は, $\bar{G}^* = C_1e^{\Delta_1\xi} + C_2e^{\Delta_2\xi}$ $x<\xi<\infty$, $\bar{G}^* = C_3e^{\Delta_1\xi} + C_4e^{\Delta_2\xi}$ $0\leq\xi<x$

Δ_1, Δ_2は(13)式の特性方程式の根である。C_1, C_2, C_3, C_4 は次の条件から決まる定数である。

(イ) $\lim_{\xi\to\infty}\bar{G}^*=0$, (ロ) $\bar{G}^*(0,s;x,t)=0$, (ハ) $\xi=x$ で $\bar{G}^*$は連続, (ニ) $\xi=x$ で $\bar{G}^*_\xi$ は不連続すなわち $\bar{G}^*_\xi = e^{-st}/K_x$

以上により$\bar{G}^*(\xi,s;x,t)$が求まり,逆ラプラス変換をして$G^*(\xi,\tau;x,t)$が得られ,相反性 $G(x,t;\xi,\tau)=G^*(\xi,\tau;x,t)$ より$G(x,t;\xi,\tau)$が求まり,主変数とパラメータを入換えて$G(\xi,\tau;x,t)$は結局次のように得られる。

$$G(\xi,\tau;x,t) = -\frac{\exp\left\{\frac{\bar{u}(x-\xi)}{2K_x} - \left(\frac{\bar{u}^2}{4K_x}+\alpha\right)(t-\tau)\right\}}{2\sqrt{\pi K_x(t-\tau)}}H(t-\tau)\left[\exp\left\{\frac{-(x-\xi)^2}{4K_x(t-\tau)}\right\} - \exp\left\{\frac{-(x+\xi)^2}{4K_x(t-\tau)}\right\}\right]$$

$H(\ )$はヘビサイドの階段関数である。(14)式を(10)式に代入し解は次のようになる。 ------ (14)

$$\bar{\theta}(x,t) = d_1\int_0^t\frac{\exp\{-\alpha(t-\tau)\}}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\infty\alpha\bar{\theta}^*\left\{\exp(-d_2^2) - \exp\left(\frac{\bar{u}x}{K_x}\right)\exp(-d_3^2)\right\}d\xi d\tau$$

$$+d_1x\int_0^t\frac{h(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}}\exp\{-\alpha(t-\tau)\}\exp(-d_4^2)\,d\tau + \frac{d_1}{\sqrt{t}}\exp(-\alpha t)\int_0^\infty f(\xi)\left\{\exp(-d_5^2) - \exp\left(\frac{\bar{u}x}{K_x}\right)\exp(-d_6^2)\right\}d\xi$$
------- (15)

$$d_1=\frac{1}{2\sqrt{\pi K_x}},\quad d_2=\frac{x-\xi-\bar{u}(t-\tau)}{2\sqrt{K_x(t-\tau)}},\quad d_3=\frac{x+\xi+\bar{u}(t-\tau)}{2\sqrt{K_x(t-\tau)}},\quad d_4=d_{2,\xi=0},\quad d_5=d_{2,\tau=0},\quad d_6=d_{3,\tau=0}$$

4. 平衡水温

平衡水温の物理的意味を考えるために,(4)式において $K_x=0$ とすれば

$$\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x} = \alpha(\bar{\theta}^* - \bar{\theta}) \quad \text{- - - - - - -} (16)$$

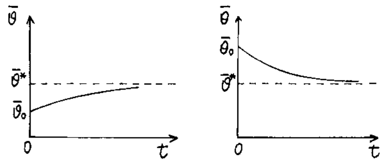


図-2

いま, $\bar{u}$, α, $\bar{\theta}^*$ を定数として, $t=0$ で $x=x_0$, $\bar{\theta}=\bar{\theta}_0$ の条件で解くと

$$x-x_0=\bar{u}t,\quad \bar{\theta} = \bar{\theta}^* + (\bar{\theta}_0-\bar{\theta}^*)\exp(-\alpha t) \quad \text{- - - - - -} (17)$$

これを図示すれば図-2となり,水理条件と気象条件が一定なとき出発点水温の如何にかかわらず平衡水温に漸近することが分かる。

次に, $\bar{u}$, α を定数, $\bar{\theta}^* = A + B\cos\omega t$ とし同じ条件で(16)式を解くと

$$\bar{\theta} = A + (\bar{\theta}_0 - A)\exp(-\alpha t) + B\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\left\{\cos(\omega t-\varphi) - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\exp(-\alpha t)\right\}$$
---- (18)

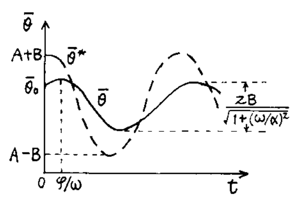


図-3

$\varphi=\tan^{-1}(\omega/\alpha)$ いま $t\gg\frac{1}{\alpha}$ のとき $e^{-\alpha t}\fallingdotseq 0$ となり(18)式は

$$\bar{\theta} = A + B\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\cos(\omega t-\varphi) \quad \text{- - - - - - - - - -} (19)$$

(19)式を図示すれば図-3となり,水温$\bar{\theta}$は平衡水温$\bar{\theta}^*$よりφ/ω遅れて最大・最少が生じ,振幅の縮少率が $1/\sqrt{1+(\omega/\alpha)^2}$ となる。これより平衡水温を近似的に気温に取れば,熱交換係数αの近似値が得られる。