

§1. まえがき 等方性乱流場における乱流拡散現象の解明は、Lagrange的に取り扱ったTaylorの拡散理論¹⁾にいつくされていると理解されているが、拡散の経過時間が渦の寿命時間に比べて充分大きくない、偏差の大きい(変動が激しい)期間における拡散(分散)現象の取り扱い、平均的(統計的)取り扱いから一歩進んで、個々の変動に着目した確率過程的な接近が必要ではないかと考える。しかし等方性乱流場について、乱れの諸特性を実測に基きいて明らかにするというよりは、単純化・理想化された乱流場という理解に立ち、平均量としてはTaylorにより提案されたモデルと同じ分散になる、非負の増分を有する確率差分方程式を基礎に数値実験を行ない、分散とその変化率の経時変化を図化した。図化の表現としては二次元水平乱流場における分散過程を示した形になったが、むしろ、一次元の分散過程の100組の実現値と理解される方が適当である。

このことにより分散パターンの認識を明確にしようとするものである。

§2. 固定渦源型分散 Taylorの拡散理論によれば固定渦源型分散(分散)過程は次のように表わされる²⁾。

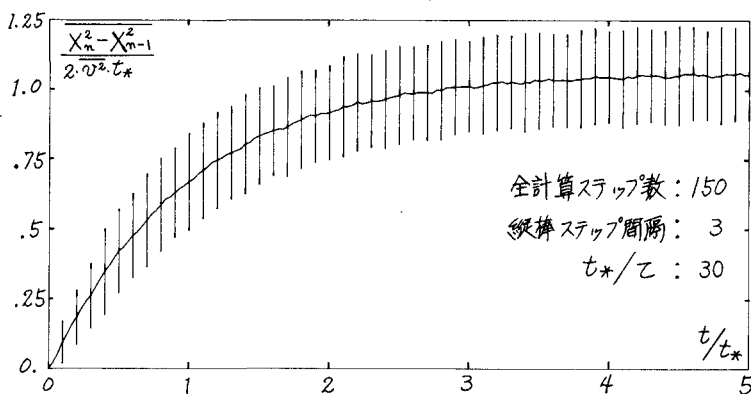


図-1 分散の増分(変化率) — A

$$\text{Lagrange 相関係数: } R_L(\xi) = \frac{v(t) \cdot v(t+\xi)}{v^2} \quad (1) \quad \text{分散: } \overline{X^2(t)} = 2v^2 \int_0^t R_L(\xi) d\xi \quad (2)$$

Taylorの提案している指数関数をLagrange相関係数として用いると次のようになる。

$$\text{相関係数: } R_L(\xi) = \exp(-\xi/t_*) \quad (3) \quad \text{分散の変化率: } d\overline{X^2(t)}/dt = 2v^2 \{1 - \exp(-t/t_*)\} \quad (4)$$

$$\text{分散: } \overline{X^2(t)} = 2v^2 t_* \left\{ t/t_* + \exp(-t/t_*) - 1 \right\} \quad (5) \quad t_*: \text{渦の寿命時間}$$

また、(3)、(4)、(5)を離散表示すると、下記のようになる³⁾。

$$\text{相関係数: } C = 1 - \frac{\tau}{t_*} \quad (6)$$

$$\text{分散: } \overline{X_n^2 - X_{n-1}^2} = v^2 \tau (1 + 2C + \dots + 2C^{n-1})$$

$$\text{増分: } W_n = v^2 \tau \left\{ \frac{2(1-C^n)}{1-C} - 1 \right\} \quad (7)$$

$$\text{分散: } \overline{X_n^2} =$$

$$v^2 \tau \left\{ \frac{1+C}{1-C} n - \frac{2C(1-C^n)}{(1-C)^2} \right\} \quad (8)$$

τ : 1ステップの時間単位

§3. 数値実験と図化 (7)・(8)における

v を確率変数(ブラウン運動・白色雑音)と考え、次のような確率差分方程式が得られる。

$$W_{m,1} = v^2 \tau \quad (9)$$

$$X_{m,1} = W_{m,1} \cdot \tau \quad (10)$$

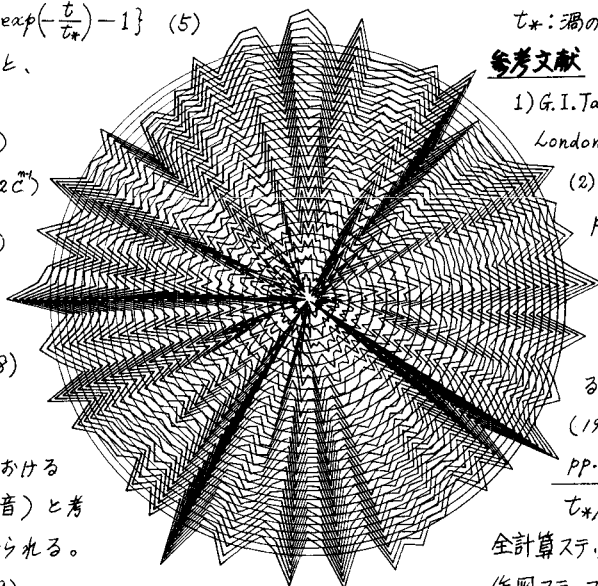


図-2 分散パターンの例 — A

参考文献

1) G. I. Taylor, Proc. London Math. Soc.

(2) 20 (1921/2)

pp. 196-212.

2) 今本博健,

「水理学・水

文学にかけ

る最近の進歩

(1967年3月)

pp. 79-92.

t_*/τ : 30

全計算ステップ数: 75

作図ステップ間隔: 3

$$W_{m,n} = C \cdot W_{m,n-1} + (1+C) \cdot v^2 \cdot t \quad (n \geq 2 \text{ のとき}) \quad (11)$$

$$X_{m,n}^2 = X_{m,n-1}^2 + W_{m,n} \cdot t \quad (n \geq 2 \text{ のとき}) \quad (12)$$

m : 流体粒子の番号 $m=1 \sim 100$

ここで v として平均値 0、標準偏差 1 の正規乱数 (乗積合同法で発生させた一様乱数に中心極限定理を利用) を用いて、本校の電子計算機 (OKITAC 4500C) で数値実験し、作図用紙テープを出力させ、本校土木棟内に設置してある M 社製自動製図装置 (フラットベッドタイプ・有効製図範囲 1200mm×900mm・最小移動距離 0.02mm) に作図させた。図-1 と図-3 は分散の増分 (変化率) を示し、図中の縦棒の長さはその値の標準偏差の 2 倍を表わしている。図-2 と図-4 は分散パターンの例を示し、拡散幅 (分散の平方根) を 3.6 度きざみで 100 組、中心を原点とし半径方向の長さとして、つまり粒子が放射状に拡がる様子を表したものである。連ねた折れ線はステップが同じものを結んだもので、25 箇の同心円はそれぞれのステップにおける拡散幅の平均値を示している。

図-1 と図-2 は偏差の大きい例であり、図-3 と図-4 は偏差の小さい例である。縮尺は平均量か同一になるように調整しており、実際は図-4 は図-2 の 4 倍の大きさである。

§4. 結果の検討と考察 図-1 と図-3 より分散の増分 (分散係数) は、分散初期は経過時間に比例して増加するが、経過時間が大きくなると一定値に近づくことをはっきり示している。分散の増分の標準偏差を見

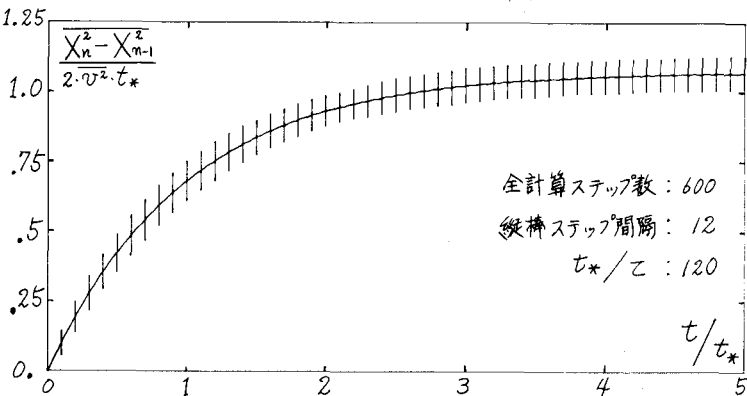


図-3 分散の増分 (変化率) — B

ると、図-1 の値は図-2 の値の 2.8 倍になっている。図-2 と図-4 から分散初期においては変動が非常に激しく、一旦何らかの原因で拡がりが遅れる (進む) とかなり遅れた (進んだ) 状態が続き、時間の経過に従って滑らかな形状に近づいていくことが分る。て (1 ステップの時間単位)

と A の例は B の例の 4 倍の大きさにとったことになっており、全体的に図-2 の分散パターンの方が図-4 よりも偏差が大きい (濃度むらがある) ことを表わしている。図-1 と図-3 における漸近値加理論値 (1.0) よりも少し (約 1/20) 大きくなったのは、離散化のためであろうと考えられる。

§5. おわりに 等方性乱流場における分散パターンを明確にしようという目的で、非負の増分を有する確率差分方程式を基礎に数値実験を行ない、分散とその変化率の経時変化を図化した。この方法によれば、かなり小さな記憶容量で数値実験が可能である。

また十分に明らかにすることはできなかったが、図-4 分散パターンの例 — B 変動の激しい分散現象の初期については、平均的な取り扱いよりも確率過程としての取り扱いがふさわしい。なお、この研究の基礎的部分を卒業研究として担当された桑野清文君 (国鉄) に謝意を表わします。

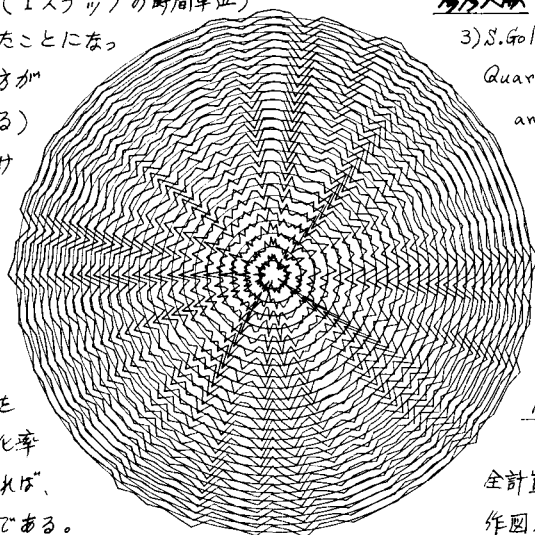


図-4 分散パターンの例 — B

参考文献

- 3) S. Goldstein,
Quart. Journ. Mech.
and Applied Math.,
6, Pt. 2 (1951)
pp. 129-156.
- 4) M. S. Bartlett,
「確率過程入門」
(邦訳: 東京大学
出版会 1968年)
pp. 149-166.
 $t_*/t: 120$
全計算ステップ数: 300
作図ステップ間隔: 12