

九州大学工学部 正員 栗谷陽一

九州工業大学 正員 藤崎一裕

1. まえがき

流速分布をもつ流れの中に投入された物質は、乱流混合以外に速度差にもとづく伸長効果をうけて拡散する。この現象は縦分散または移流分散ともよばれ、通常の乱流拡散に比べてその分散効果は著しく大きい。

沈降性のない物質の縦分散については、すでに多くの検討がなされており、⁽¹⁾ 沈降性粒子についても、水路系内で物質保存則が成立する場合（水路底部への粒子の沈積がない場合）について、モーメント法を用いて分散係数が求められている。⁽²⁾ 沈降性粒子に関するこの種の問題を取扱う場合、水路底部における粒子の挙動を細かく把握することが困難である。そこで本報では、現象のもう一方の極端な場合を押える意味で、水路底部に沈積した粒子の再浮上を考えない場合について、類似の現象の解析を試みた。

2. 基礎式

図1のように座標軸をとり、粒子濃度を C 、粒子の沈降速度を w_0 とすると、保存則および境界条件は

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial (uC)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} + w_0 C \right) \quad (1)$$

$$D \frac{\partial C}{\partial y} + w_0 C = 0 \quad ; \quad (y = h) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad ; \quad (y = y_0) \quad (y_0: u=0 \text{ となる } y \text{ の値}) \quad (2.2)$$

となる。開水路等流状態を考え、流速分布に対数分布を仮定すると、次式となる。

$$\frac{u}{u_*} = A + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* y}{\nu} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \quad (3)$$

$$D = \kappa u_* y (1 - y/h) \quad (u_* \text{ 摩擦速度}) \quad (4)$$

ここで、濃度 C の x 方向の変化は小さいとして、移流座標 x_1 で展開して1次の項までとり、補正項を加して、次式で表す。

$$C(y, t) = \bar{C}(y, t) (1 + \alpha x_1) + \hat{C}(y, t) \quad (5)$$

α は定数、 $\bar{C}$ は下の(6)式の解とする（境界条件は、(2.1)、(2.2)と類似）

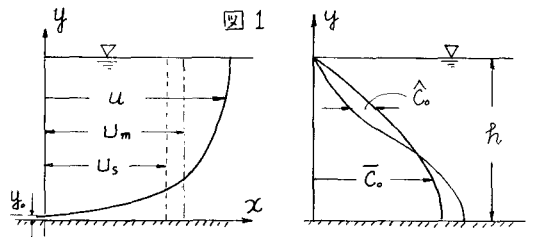
$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} + w_0 \bar{C} \right) \quad (6)$$

さらに、上式を変数分離してえられる常微分方程式の最低次の固有値入。および固有関数 $\bar{C}_0(y)$ を用いて、 $\bar{C}(y, t)$ を次式で表す。

$$\bar{C}(y, t) = \left\{ \bar{C}_0(y) \cdot (1 + \alpha x_1) + \hat{C}_0(y) \right\} e^{-\lambda_0 t} \quad (7)$$

ここで、 x_1 を粒子基準の平均流速 U_s を用いて

$$x_1 = x - U_s \cdot t \quad (8)$$



$$U_s = \frac{\int_{y_0}^h u(y) \bar{C}_0(y) dy}{\int_{y_0}^h \bar{C}_0(y) dy} \quad (9)$$

とすると、(5)、(8)式を(1)式に代入して

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial t} + \alpha \hat{U}_s \bar{C} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \hat{C}}{\partial y} + w_0 \hat{C} \right) \quad (10)$$

$$\hat{U}_s = U - U_s$$

とする。さらに(10)式と(7)式とから

$$\frac{d}{dy} \left(D \frac{d\hat{C}_0}{dy} + w_0 \hat{C}_0 \right) = -\lambda_0 \hat{C}_0 + \alpha \hat{U}_s \bar{C}_0 \quad (11)$$

または、無次元化して整理すると

$$\bar{y}(1-\bar{y}) \frac{d^2 \hat{C}_0}{d\bar{y}^2} + (1-2\bar{y}+Z) \frac{d\hat{C}_0}{d\bar{y}} + \lambda_0 \hat{C}_0 = \alpha \hat{U}_s \bar{C}_0 \quad (12)$$

がえられる。このときの境界条件は下の2式となる

$$\bar{y} \cdot (1-\bar{y}) \frac{d\hat{C}_0}{d\bar{y}} + Z \hat{C}_0 = 0 \quad ; \quad (\bar{y} = 1) \quad (13.1)$$

$$d\hat{C}_0/d\bar{y} = 0 \quad ; \quad (\bar{y} = \bar{y}_0) \quad (13.2)$$

ここで $Z = w_0 / (\kappa u_*)$,

$$\left. \begin{aligned} \bar{y} &= y/h, \quad \bar{y}_0 = y_0/h, \quad \hat{U}_s = \hat{U}_s / (\kappa u_*), \\ \bar{t} &= t \cdot \kappa u_* / h, \quad \bar{x} = x/h, \quad \bar{U}_s = U_s / (\kappa u_*) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

とする。

(12) 式の解は、同式の同時方程式の解が $\bar{c}_0(y)$ であることを利用して、定数変化法により次式で表される

$$\hat{c}_0 = \bar{c}_0 \int_{\frac{1}{2}}^y d\bar{y} \left\{ \alpha \int_{\frac{1}{2}}^{\bar{y}} Q(\bar{y}) e^{\int_{\frac{1}{2}}^{\bar{y}} P(\bar{y}) d\bar{y}} d\bar{y} + A_1 \right\} e^{-\int_{\frac{1}{2}}^y P(\bar{y}) d\bar{y}} + A_2 \quad (15)$$

$$P(\bar{y}) = 2 \left(\frac{d\bar{c}_0/d\bar{y}}{\bar{c}_0} + (1-2\bar{y}+Z)/\{\bar{y}(1-\bar{y})\} \right)$$

$$Q(\bar{y}) = \hat{u}_s / \{\bar{y}(1-\bar{y})\} \quad A_1, A_2: \text{積分定数}$$

一方、(1) 式を (5) 式および境界条件を考慮して、全水深にわたって平均すると、(16) 式となる

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial \bar{t}} + U_s \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \hat{u}_s c d\bar{y} - \lambda_s \langle c \rangle \quad (16)$$

$$t = t_0 + \Delta t \quad \langle c \rangle = \int_{\frac{1}{2}}^1 \bar{c} d\bar{y}$$

(16) 式の右辺第 1 項が移流分散を生じる項で、この場合の分散係数 $D_L(Z)$ は次式で表される。

$$\frac{D_L(Z)}{h u_*} \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial \bar{x}} = -K \int_{\frac{1}{2}}^1 \hat{u}_s \hat{c} d\bar{y} \quad (17)$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{D_L}{h u_*} = -K \langle \hat{u}_s \hat{c} \rangle \quad (18)$$

なお、水路底部においても (2.1) 式が成立すると仮定すれば、粒子の沈積を認めない場合に対応するから、(15)、(9) 式の $\bar{c}_0$ に Rouse 分布を用いると、(18) 式は

$$\frac{D_L}{h u_*} = -K \frac{\sin(\pi Z)}{\pi Z} \int_{\frac{1}{2}}^1 \hat{u}_s \left(\frac{1-\bar{y}}{\bar{y}} \right)^Z d\bar{y} \int_{\frac{1}{2}}^y \left(\frac{1-\bar{y}}{\bar{y}} \right)^{-Z} \frac{1}{\bar{y}(1-\bar{y})} d\bar{y} \\ \times \int_{\frac{1}{2}}^{\bar{y}} \hat{u}_s \left(\frac{1-\bar{y}}{\bar{y}} \right)^Z d\bar{y} \quad (Z < 1) \quad (19)$$

となる。上式は、Sumer によりモーメント法を用いて導かれた式と一致する。

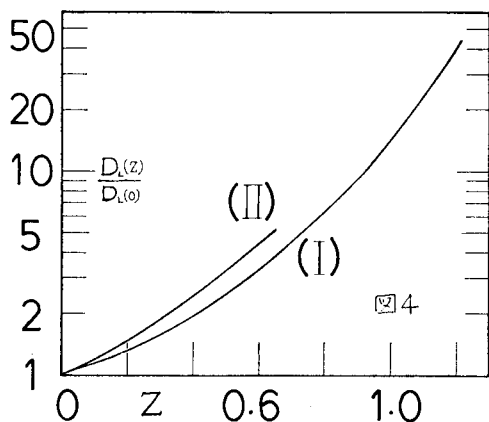
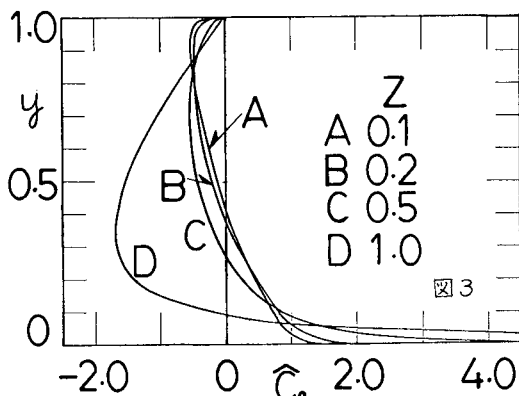
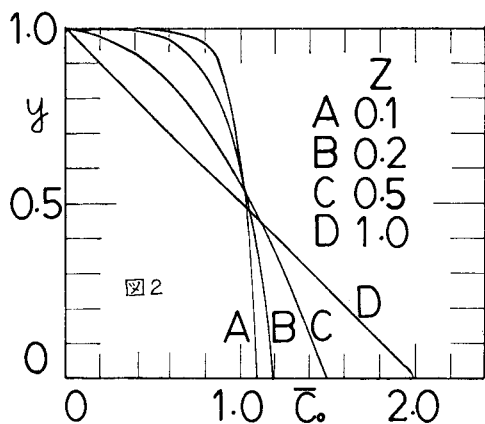
3. 計算結果

図 2 および図 3 に それぞれ $\bar{c}_0(y)$ 、 $\hat{c}_0(y)$ と Z との関係を示す。($\int_{\frac{1}{2}}^1 \bar{c}_0 d\bar{y} = 1$ とした) 図 4 には、(粒子の再浮上を認めない場合に相当する) (18) 式による分散係数 (I) と (沈積を認めない場合の) (19) 式による値とを、 $Z=0$ の中立系粒子の値との比で示した。

図 4 によると、 Z の値の増加につれて、 D_L の値も急激に増大する傾向が認められる。また、(I) の方が (II) に比べて値が小さめに出ているが、これは水路下部における Rouse 分布と $\bar{c}_0$ との差によるものであろう。

参考文献

- 1) Elder, J. W.: J. Fluid Mech., Vol. 15, 1959, pp.544~560
- 2) Sumer, B. M.: J. Fluid Mech., Vol. 65, 1974, pp.11~28



なお (I) の計算値は $Re = u_* h / \nu = 30,000$ ($\bar{y}_* = 0.000226$) の場合で、(II) の積分の下限は 10^{-5} とし、数値積分は台形公式によった (総分割数 900)

- 3) 栗谷, 藤崎: 土木学会論文報告集, 第277号, 1978, pp.132~136