# II-77　固体粒子を浮遊する層流の解析的研究

東京工業大学　正会員　福岡捷二
運輸省　　　　　　　　宮内俊一

土砂を浮遊する乱流の流速分布，抵抗係数，乱流特性，エネルギー授受に関してこれまで多くの成果が得られてきた。しかし多くの点が明らかとなった現在，従来の解析の限界も逆に浮かびあがってきたというみかたもできる。何故ならば，提案されてきた粒子浮遊流の理論は，それぞれが立脚している主要な考えかたに違いがあるにもかかわらず実験データを同程度に説明し得る。この事実は個々の理論が持ちこんだ力学の基本的な考えは複雑な土砂浮遊流の力学の一部分であるが全体像を語っていないことを暗示している。乱流現象は本質的には解析的に閉じる問題でなく，乱れに関して種々の仮定をもちこんで始めて近似解を得る。従って土砂浮遊流の特性を解析的に説明しようとすると物理的な"不明確さ"をまぬかれない。

乱流と層流の粒子浮遊流は本質的には同一で粒子に働く卓越した力が異なるために粒子の挙動に違いが生じる。乱流では乱れによる拡散が主因であるが乱れ，速度分布，壁の影響が複雑にからみあっている。一方，層流では揚力のみが粒子を浮遊させる原因である。したがって固体粒子を浮遊する層流では，揚力に及ぼす流速分布，壁の効果が明らかになりさえすれば乱流の場合に持ちこまれる理論の"不明確さ"が除かれ，物理的に説得力のある理論の組みたてが可能となる。

著者ら[1]は，勾配の小さい層流中を等速運動する一個の球の相対速度差，揚力，抗力を実測し広範囲にわたる条件に対し適用可能な式を見出した。

$$\frac{u_p}{U_{max}} = -1.14\eta^2 + 2.05\eta + 0.09 \quad (1), \qquad \frac{\Delta u}{U_{max}} = 0.14\eta^2 - 0.05\eta - 0.09 \quad (2)$$

$$L = \frac{1}{2}\rho g h d^2 i (1-\eta) \quad (3), \qquad F = L \cdot i \quad (4)$$

ここに，$u_p$：固体粒子移動速度，$\Delta u$：相対速度差（$\Delta u = u_p - u$），$L$：揚力，$F$：抗力，
$\eta = y/h$，$h$：水深，$i$：底勾配，$d$：粒径，$\rho$：液体の密度．

上式が低濃度の固体粒子浮遊流にも適用可能であると考え，以下の5項目について理論的に検討する。

(1) 体積濃度分布，　(2) セン断力分布，　(3) 流速分布，
(4) 水深の変化，　(5) 固体粒子輸送量。

## 1 体積濃度分布

層流では，液中重量 $W$ の粒子を浮かせておく力は揚力である。固体の密度 $\rho_s$ と球径，水理条件が決まると釣り合い関係（$L=W$）からその粒子がとどまるべき流路床からの高さが一義的に決定する。

$$\frac{1}{2}\rho g h d^2 i (1-\eta) = (\rho_s - \rho) g \frac{\pi}{6} d^3 \quad (5)$$

$$d = \frac{3}{\pi}\frac{\rho}{\rho_s - \rho} h i (1-\eta) \quad (6)$$

上式から層流では単位時間あたりに混入する粒子の量とそれらの粒径～体積百分率がきまると，各高さを流れてゆく単位時間あたりの粒子体積が一義的に決定する。いま，ある水理条件に対して式　より $d_0$ 以下の球径の粒子が浮遊粒子となり得ることがわかる。$d < d_0$ を満たす $d$ に対して　この粒径よりも小さい粒子が単位時間あたりに混入される体積を $V(d)$ とする。$V(d)$ は既知である。流路床から高さ $y$ の位置にある粒子の

体積濃度を $C(y)$ とすると質量保存則と式(1)より未知濃度 $C(y)$ を求めることができる。

$$C(y) = -\frac{1}{u_p(y)}\frac{dV(d)}{dy} \qquad (7)$$

しかし，実際には固体粒子も多数個混入すると，密度差のために圧力が静水圧よりも高まる。このため浮力が増大し，固体粒子は浮き易くなる。このため 多粒子を含む流れでは，球径 $d$ の粒子は式(6)で決まる $\eta$ の高さではなく $\eta'(\geqq\eta)$ の高さを流れていくことになる。このとき 流体の密度 $\rho$ は 固体粒子を含むため

$$\rho' = \rho + (\rho_s - \rho)\,C(y) \qquad (8)$$

となる。釣り合い式は 式(6)で $\rho$ のかわりに $\rho'$ を用いて次のように書きあらわせる。

$$\frac{1}{2}\rho' g h d^2 i(1-\eta') = (\rho_s - \rho')g\frac{\pi d^3}{6}$$

したがって 多粒子混入に伴なう新らしい釣り合いの位置は

$$\eta' = \eta + \frac{\rho_s C(y)}{\rho + (\rho_s - \rho)C(y)}(1-\eta) \qquad (9)$$

となる。式(7)より粒子混入の影響を無視したときの濃度分布がわかり このC(y)を用いて式(9)により多粒子混入の影響を考慮した場合の高さ $y$ よりも上を単位時間あたりに流れる粒子の体積 $V(y)$ が求まる。したがって固体粒子を浮遊する層流の体積濃度分布は 次式で計算できる。

$$C'(y) = -\frac{1}{u_p(y)}\frac{dV'(y)}{dy} \qquad (10)$$

## 2 粒子浮遊流のセン断力，流速分布，水深の変化，浮遊粒子量の算定

固体粒子は 流体との密度差のために 式(2)で与えられる相対速度差（$\Delta u>0$）をもち，式(4)で与えられる力で流体を前方に押しながら流下してゆく。粒子によって流体に仕事がなされ，かつ流体が等速運動するならば，仕事がなされた分だけ底面セン断力が増加しエネルギー消散が起こらなければならない。その結果，固体粒子を含まない場合と異なった流速分布，水深が生じることになる。

式(10)より 体積濃度分布 $C'(y)$ が定まると 運動量の関係よりセン断力の増加量 $\Delta\tau$ は次式で与えられる。

$$\Delta\tau(y) = (\rho_s - \rho')gi\int_y^h C'(y)\,dy \qquad (11)$$

粒子を浮遊することによる流速の増加量を $u_0$ とすると，粘性係数が変化しなければ $\Delta\tau = \mu\, du_0/dy$ が成立する。よって 流速の増加量は $C'(y)$ を用いて書きあらわすことができる。

$$u_0(y) = \frac{\rho_s - \rho'}{\mu}gi\int^y\!\!\int_y^h C'(y)\,dy\,dy \qquad (12)$$

一方，水深の変化量 $\Delta h$ は 流量一定の条件より

$$\int_0^{h-\Delta h}[1-C'(y)](u+u_0)\,dy = \int_0^h u\,dy \qquad (13)$$

となる。式(13)より $\Delta h$ を計算するとその値は $h$ に比して十分小さい大きさとなる。

浮遊粒子量 $Q_s$ は $C'(y)$ を用いて 次式で算定できる

$$Q_s = \int_0^{h-\Delta h} C'(y)\,u_p(y)\,dy \qquad (14)$$

残された問題は 上述の理論を実験によって検証することである。

1) 福田ら：層流中を運動する球に働く揚力と抗力に関する実験的研究，土木学会論文報告集 投稿中