

運輸省 正員 細川 泰廣
京都大学工学部 正員 中川 博次
京都大学工学部 正員 辻本 哲郎

1. まえがき 掃流過程の本質的特徴は平均的な砂の流れといえども砂の個々の粒としての挙動の特性がかなり保存され、平均的な運動をする粒の集合としては取り扱えないことである。すなわち個々の砂粒の確率的挙動が個別のものとこの性質を保ちながら全体としての現象を構成している。したがって、掃流機構の解明には、stochasticな面とdeterministicな面の結合が必要で、どちらか一方では達成し得ない。本報は、16mmフィルム解析による掃流過程（但し平坦河床に限る）の詳細な観察からこのような不規則性状をも含めた掃流砂の運動機構を探ろうというものである。図-1にその一つのサンプル/確率的母集団からの一つの標本が示されるように、掃流砂の挙動は複雑で、とくに床面に散在する突起との衝突による急激かつ大きな変動により特徴づけられている。本研究では主としてこれに着目し、力学モデルを基礎とした確率的検討を行う。

2. 個々の砂れきの挙動 16mmフィルム解析による掃流砂れきの挙動の観察から、掃流過程を急激かつ大きな変動を与える衝突過程と、流体力による加速されながら流水の乱れと床面摩擦のゆるやかなほぼ均質な変動の影響を受けて流送される過程とに分けて考えると都合が良い。前者は衝突による速度変化を与える推移確率 $h(u_{*3}|u_{*1})$ で、一方後者は初速度と衝突しない限度の移動距離の条件を付した速度分布の p.d.f. (確率密度関数) $f(u_{*1}, u_{*2}|x, u_{*0})$ で表現される。 u_{*1} は砂れき速度 u を摩擦速度 u_{*0} で、 x は移動距離 x を粒径 d で無次元化したもの、下付添字 0, 1, 3 はそれぞれ初期値および衝突前後の状態の値を示す。

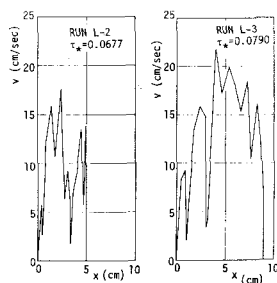


図-1

また床面で移動を開始した砂れき α 番目の突起に衝突する直前までの速度分布は、粒径による無次元突起間隔の p.d.f. $f(x|X_*)$ として次式で与えられる。

$$g_1^1(u_{*1}) = \int_0^{\infty} f(u_{*1}, u_{*2}|x, u_{*0}) f(x|X_*) dx \quad (1)$$

ここで上付添字は突起の番号を示す。突起に

衝突後正確には突起乗り越え後の砂れきの速度分布は、

$$g_3^1(u_{*3}) = \int_0^{\infty} h(u_{*3}|u_{*1}) g_1^1(u_{*1}) du_{*1} \quad (2)$$

のとなり、この突起乗り越え後の u_{*3} を初速度として次の突起に向う。したがって、 α 番目の突起への衝突直前には砂れきの速度分布は、

$$g_1^{\alpha}(u_{*1}) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g_3^{\alpha-1}(u_{*3}) f(u_{*1}, u_{*2}|x, u_{*0}) f(x|X_*) du_{*3} dx = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g_1^{\alpha-1}(u_{*1}) h(u_{*3}|u_{*1}) f(u_{*1}, u_{*2}|x, u_{*0}) f(x|X_*) du_{*1} du_{*3} dx \quad (3)$$

で与えられる。同様の考察を進めることにより、一般に α 番目 ($\alpha \geq 1$) の突起との衝突直前及びその突起乗り越え直後の速度分布は、次のように漸化式形式で与えられることがわかる。

$$g_1^{\alpha+1}(u_{*1}) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g_1^{\alpha}(u_{*1}) h(u_{*3}|u_{*1}) f(u_{*1}, u_{*2}|x, u_{*0}) f(x|X_*) du_{*1} du_{*3} dx \quad (4)$$

$$g_3^{\alpha+1}(u_{*3}) = \int_0^{\infty} g_1^{\alpha+1}(u_{*1}) h(u_{*3}|u_{*1}) du_{*1} \quad (5)$$

ただし、突起間隔 $\{X_*\}$ は independently,

identically distributed である。すなわち、衝突直後における砂れきの速度分布（衝突前のものも含めて）は砂面の構成状態を表す $f(x|X_*)$ 、衝突の力学過程を表す $h(u_{*3}|u_{*1})$ 及び衝突のない比較的均質な運動状態を表す $f(u_{*1}, u_{*2}|x, u_{*0})$ とで表現される。

3. 砂面の凹凸状況 平坦河床といえども粒径程度の砂面の不規則性がみられ、掃流砂れきの挙動はこれにより大きく影響される。図-1に見られるような急激な砂れき速度の減少はこれによるもので、図-1をもとに速度の急激な変化をきたすような有効突起間隔を調べた。これより水理条件にほとんど関係なく、その平均値 ($\bar{X}$)、変動係数に二つべき式が認められた。

$$\bar{X}/d = 5.0 \sim 7.0, \quad \alpha_X = 0.6 \sim 0.7. \quad \text{この結果突起間隔の分布は}$$

図-2に示すように、shape parameter が 3 程度の gamma 分布で表示し得ることがわかった。すなわち、 $\xi = X/X_*$ と規格化して

$$f_X(\xi) = \frac{2}{3} \xi^2 \exp(-3\xi) \quad (6)$$

である。これは砂面凹凸を詳細にポイントゲージで測定した結果、平均河床面より粒径の 0.3 倍程度上方に運動面を仮定した時の突起間隔に一致し、このとき突起高さは平均値が粒径の 0.3 倍、変動係数が約 1 となり、指数分布で表示するのが適当と考えられる。すなわち、粒径を無次元化した突起高さ Δx の p.d.f. は、

$$f_{\Delta}(\Delta x) = (1/\Delta x_0) \exp(-\Delta x/\Delta x_0) \quad (7)$$

となる。但し $\Delta x_0 = 0.3$ である。

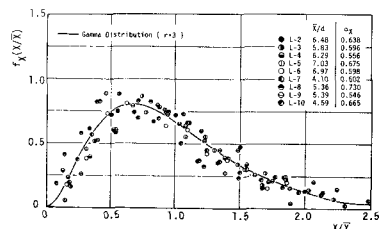


図-2 衝突に有効な突起の間隔分布

4. 衝突過程 衝突の際の突起粒子及びその周辺粒子のずれ動きを無視した衝突モデル²⁾を用いると、衝突直前速度(v_1)、突起高さ($\Delta x + d$)を与えられたときの突起乗り越し後の砂れきの速度は次式で与えられる。 $v_3^* = \sqrt{(1 + 4k^2/d^2 \cdot 2\Delta x)(1 + 4k^2/d^2)} \cdot v_1^* - 2\Delta x/B_* \dots (8)$

但し、 $v_1^* = v_1/\sqrt{gd}$ 、 k : 砂粒の回転二次半径であり、 $B_* = (\sigma/\rho - 1)/\{(\sigma/\rho + C_M) \cdot (1 + 4k^2/d^2)\} \dots (9)$ σ/ρ : 砂れきの比重、 C_M : 付加質量係数である。ところで Δx は確率係数なのでいま v_1 が与えられた場合でさえ(も、ともこれも確率変数である) v_3 は確率変数である。すなわち条件付確率変数 $\{v_3|v_1\}$ を考えるのが望明で、これのp.d.fは衝突による v_1 から v_3 への推移確率となる。これは次式で与えられる。 $h(v_3^*|v_1^*) = f_H(\Delta x) \cdot \delta(v_3^* - v_1^*) \dots (10)$

ここで Δx は式(8)を Δx について解いたもので、 v_3^* 、 v_1^* の関数となっている。上式を用い、次式で計算される $E\{v_3^*|v_1^*\}$ は図-3に示すように実験値と良く合致する。一方、 $\{v_3^*|v_1^*\}$ の変動係数は実験結果によると一定で約0.5となり、 $h(v_3^*|v_1^*)$ はこれを考慮したgamma分布で近似される。

$$h(v_3^*|v_1^*) = \{4/(0.08 v_1^{*2} + 0.3 v_1^*)\}^{1/4} / \Gamma(4) \cdot v_3^{*3} \cdot \exp\{-4 v_3^*/(0.08 v_1^{*2} + 0.3 v_1^*)\} \dots (11)$$

5. 運動過程 衝突を伴わない粒子の運動過程は、摩擦係数が図-4に示すように

に粒子速度に依存するとして滑動形式の運動方程式で、そのアサンブル平均を記述することができる³⁾(図-5参照)。すなわち、こうした運動表示により、 $v_* = d(X_*, v_*)^2 \dots (12)$ なる形式が得られている。一方、その運動のゆらぎを実験によって検討すると、粒子速度の条件付変動係数 α_{v_1} 、 α_{v_2} は X_* に対し定値0.25程度となっている。したがって、 $f_{v_1, v_2}(v_*|X_*, v_{*0})$ は次のようなgamma分布で近似できると考えられる。

$$f_{v_1, v_2}(v_*|X_*, v_{*0}) = \{16/d(X_*, v_{*0})\}^{16} / \Gamma(16) \cdot v_*^{15} \cdot \exp\{-16 v_*/d(X_*, v_{*0})\} \dots (13)$$

6. 掃流砂れきの速度分布 3, 4, 5で与えられる情報を基で提示したモデルに

導入することによって砂れきの挙動、とくに速度分布を知るこができる。すなわち式(4)、(5)に式(6)、(11)、(13)を代入して数値計算を行ない、衝突直前及び突起乗り越し後の砂れきの速度の期待値と変動係数を求めた。この結果は図-6、7に示される通りで期待値、変動係数とも数回の衝突で平衡値に達しており、 $\bar{v}_{*1} = 2.8$ 、 $\alpha_{v_1} = 0.36$ ； $\bar{v}_{*3} = 1.2$ 、 $\alpha_{v_3} = 0.77$ を得た。これらは表-1、図8~10に示される実験結果と良く合致している。

7. あとがき 本報では掃流過程のstochastic modelの優位性に鑑み、これ

に対する力学的背景を明確にする目的で詳細な検討を行った。本研究の結果掃流砂れきの挙動の力学的機構は確率論的手法を用いて初めて明らかにし得るものであることばかり、掃流過程の力学が統計力学的に構成し得るものであるとの確信が得られた。

表-1 衝突過程についての実験結果

Run	$\bar{v}_{*1}$	α_{v_1}	$\bar{v}_{*3}$	α_{v_3}
L-2	3.14	0.41	1.44	0.71
L-3	2.91	0.47	1.16	0.73
L-4	3.42	0.40	1.30	0.76
L-5	3.44	0.33	1.27	0.70
L-6	3.14	0.35	1.09	0.73

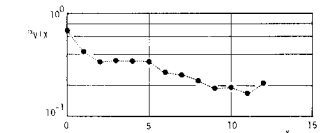


図-10 運動過程での砂れき速度の変動係数

図-6 衝突前後の砂れき速度の期待値(計算値)

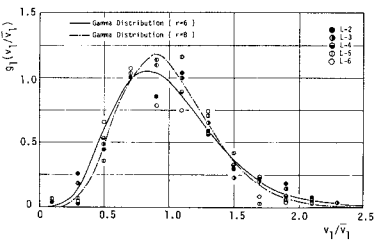


図-8 衝突直前の砂れき速度の分布

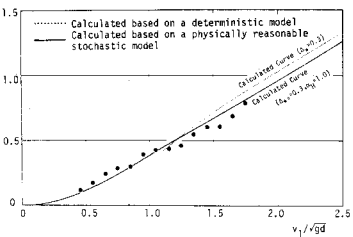


図-3 衝突後砂れき速度の条件付平均値

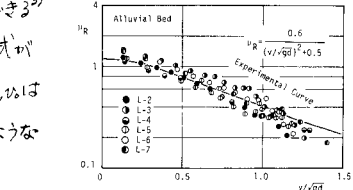


図-4 掃流砂れきの摩擦係数

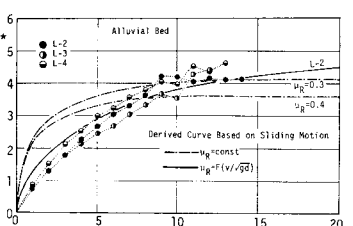


図-5 掃流砂れきの運動のアサンブル平均

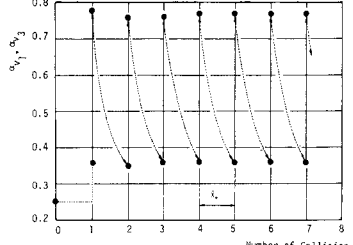


図-7 衝突前後の速度の変動係数(計算値)

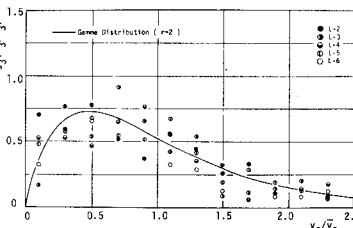


図-9 衝突直後の砂れき速度の分布

<参考文献> 1) 中川、辻本、細川：昭和54年度関西支部年報，1979， 2) 中川、辻本：土木学会論文報告集，1975， 3) 中川、辻本、細川：京大防災研究所年報(投稿中)1979。