II-75　砂粒子の"存在確率"と掃流土砂に関する研究

東京都下水道局　正会員 ○ 望月　裕
東京工業大学工学部　正会員　山田　正
早稲田大学理工学部　正会員　吉川秀夫

1. 序論　河川の底面を構成する砂，砂利等の粒子は水流からの作用を受け，揚力なり，抗力によって動き出し流下していく。この砂粒子はその運動形態によって通常掃流砂と浮遊砂とに分類されている。掃流砂は動き出した後転動や滑動または小跳躍(Saltation)し流下していくものであり，一方浮遊砂は流れの中の乱れの作用を受けて漂うっような運動をし，その運動は確率過程として考えられるものである。そのうち本研究は水路床の近傍を運動する掃流砂に関するものである。ところで従来より掃流砂に関しては数多くの理論的研究や実験的研究がある。それらの研究のうちあるものは掃流砂を底面でのズリ運動と見たり，あるものは底面近傍でのsaltationと見たり，また揚力なり抗力によって運動を継続しているとするものもあれば，粒子の底面での衝突・反撥が重要な点であると主張するものもあり多種多様である。本研究はそれら従来の研究成果を踏まえ，出来るだけ物理的に明確な量に基づく掃流砂の理論を展開することを目的としている。

2. 理論　一般に水流中を輸送される土砂量は流砂の濃度分布とその流下速度とによって次式の様に表わすことが出来る。ここにzは平均河床面を原点とする鉛直方向座標，hは今の場合掃流層の高さ，$C(z)$は土砂濃度分布，

$$q = \int_0^h C(z)\,U(z)\,dz \qquad (1)$$

$U(z)$は土砂粒子の平均流下速度分布，qは単位時間，単位巾当り流送される体積土砂量である。以下の展開においては(1)式における$C(z)$, $U(z)$を求めることによってqを算定する方法を述べる。上述の様に掃流土砂の底面近傍での運動は複雑であり，また運動形態も停止，跳躍，衝突，反撥等多様である。よってここでは以下に述べる1つの粒子の"存在確率"の概念を提案する。いま1つの粒子に着目し，その平均河床面からの高さを$Z(t)$とすると，それは次の様にFourier級数の和で表わすことが出来よう。ここにC_0は着目する粒子の平均存在高さでありφ_mは位相差である。次に波数mとφ_mとの関係であるが一般にmとφ_mとの間に関数関係が存在するときには$Z(t)$は決定論で示される一定の波形を示すであろう。しかし実際には砂粒子の運動は，底面の凹凸での衝突や反撥，または砂粒子同志のぶつかり合い等によってある時は移動し，ある時は停止し，決して一定の波形を保ちつづけることは無いであろう。

$$Z(t) = C_0 + \sum_{m=1}^{n} C_m \cos\left(\frac{m\pi t}{T} - \varphi_m\right) \qquad (2)$$

$$Z(t) = C_0 + \sum_{m=1}^{n} C_m \cos(\varphi_m) \qquad (3)$$

このときはφ_mとmとの間の独立性を仮定することが出来，(2)式は(3)式となる。また$0 \le \varphi_m \le 2\pi$より，$Z(t)$が$0 < Z < \bar{z}$に存在する確率$P(\bar{z})$は各波数m間での独立性を仮定すれば，(4)式となる。ここに$d\varphi_m/2\pi$はφ_mが$\varphi_m \sim \varphi_m + d\varphi_m$に存在する確率を意味する。以下の計算は$Z$を乱流変動として気象学の正野教授が乱れの頻度分布を求める時に使われた理論展開[1)]をここではZを1つの粒子の存在位置と見たてて用いたものである。

$$P(\bar{z}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \cdots \int_0^{2\pi} d\varphi_n \qquad (4)$$

ところで粒子が$\bar{z} \sim \bar{z} + d\bar{z}$に存在する確率$F(\bar{z})d\bar{z}$と$P(\bar{z})$の間には$F(\bar{z})d\bar{z} = dP(\bar{z})$の関係がある。また底面付近を運動する粒子は平均河床面をつき抜けることがないと言う物理的に要請される条件を持っており，この条件は(5)式で示される。(5)式を(4)式に代入し，粒子の"存在確率"$F(\bar{z})d\bar{z}$を求めると，式展開を行った後に，(6)式を得る。ここにKは砂粒子の分散であり，C_0は粒子の平均存在位置である。(6)式より$F(\bar{z})$は2つのガウス分布の和で表わされていることがわかる。次に(6)式の妥当性

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \bar{z}t \cos Z_n t}{t}\,dt = \begin{cases} 1 & |Z_n| < \bar{z} \\ 0 & |Z_n| > \bar{z} \end{cases} \qquad (5)$$

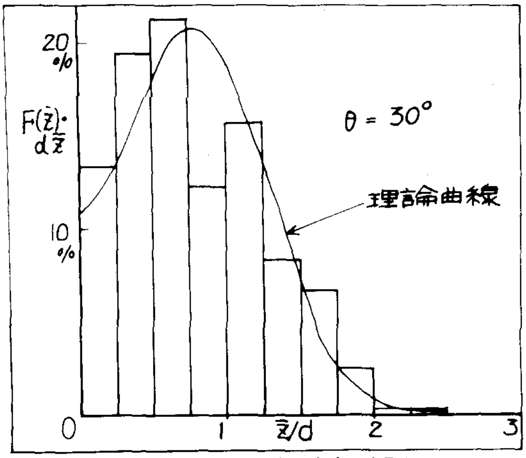
$$F(\bar{z}) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi K}} \exp\left[-(\bar{z} - C_0)^2/2K\right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi K}} \exp\left[-(\bar{z} + C_0)^2/2K\right] \qquad (6)$$

を検討してみた。上記の様に粒子の"存在確率"$F(\bar{z})$は砂粒子が流水中に存在していることを念頭に置いているわけではなく，静水中で粗度を敷き並べた斜面上を落下し，跳躍，反撥を繰り返す粒子についても$F(\bar{z})$は考えることが出来る。図－1は直径1.84cmの球と同じ半径の塩ビパイプを敷き並べた斜面を静水中に浸し，その上を転動，跳躍して落下する球の軌跡を写真に撮り，これから得た静水中での$F(\bar{z})$の棒グラフと，(6)式でC_0, Kを適当に定めたときの理論曲線であり，比較的良く合っている。ところで実際の掃流砂では$C_0=0$と置くことが考えられる。次に$C(\bar{z})$と$F(\bar{z})$には$C(\bar{z}) \propto F(\bar{z})d\bar{z}$の関係がある。よって(7)式が成立する。次に(1)式において粒子の移動速度$u(\bar{z})$に関して

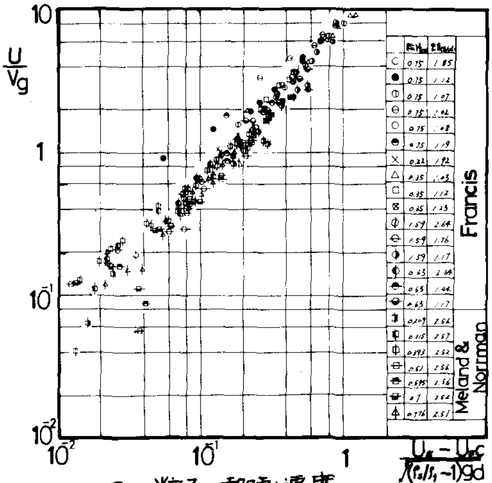
$$C(\bar{z}) = \frac{F(\bar{z})}{F(0)}C(0) = C(0)\sqrt{\frac{\pi K}{2}}F(\bar{z}) \quad (7)$$

考える。本来これは存在位置$\bar{z}$の関数であるがここでは高さ方向に平均し，また1つの粒子に着目して追跡して観測した時の長時間平均の移動速度であり$\bar{U}$と記す。本研究では主にFrancisら[2]及びMelandら[3]の実験結果を用いた。ところで彼らの実験は適当な粗度を持った開水路流れの中で移動し続ける様々な形状と材質を持つ粒子の移動速度に関するものであり，掃流砂は時として底面に停止することがあることを考えると彼らの実験結果をそのまま用いることは出来ないが，水理量との間の基本的な関係は同じであると考えると$\bar{U}=Pu$が成り立っている。ここにPは粒子の停止確率(移動)であり，uは移動し続ける粒子の流下速度である。このとき実験式として(8)式が成立する。ここにV_gは粒子の沈降速度であり，他の記号は通常の通りである。(7)式中の分散Kに関しては今だ未知量であるが(9)式の形を仮定する。ここにA, mは定数である。(7),(8),(9)式を(1)式に代入し積分すると掃流砂量q_Bは(10)式の様に表わされる。ここにBは定数である。ここで$m=4$とした場合が佐藤・吉川・芦田の式でu_*/u_{*c}が大きい場合の掃流砂量となり，mの値を4前後で変えると従来より提案されている様々の掃流砂量公式を得ることが出来る。現在本研究で新たに提出した砂粒子の"存在確率"に基づく掃流砂理論の細部を実験的に検討することを予定しており(10)式中の今だ決定していないB, p等の物理的意味を含めてそれらを明らかにしたいと考えている。<u>おわりに</u>　本研究で提案した粒子の"存在確率"と流砂量あるいは土砂濃度分布との関係は水文学で数※

※える unit hydrograph と hydrograph の関係に似ていると言えよう。今後はこの様な考え方も取り入れて研究を行ってみる予定である。



図－1　粒子の存在確率(静水中)



図－2　粒子の移動速度

$$\frac{u}{V_g} = 5.8\left(\frac{u_* - u_{*c}}{\sqrt{gd(\rho_s/\rho_f-1)}}\right) \quad (8)$$

$$\frac{K}{d^2} = A\left(\frac{u_* - u_{*c}}{\sqrt{gd(\rho_s/\rho_f-1)}}\right)^m \quad (9)$$

$$\frac{q_B}{u_* d} = BpC(0)\left(\frac{V_g}{u_*}\right)\left(\frac{u_* - u_{*c}}{\sqrt{gd(\rho_s/\rho_f-1)}}\right)^{\frac{m}{2}+1} \quad (10)$$

<u>参考文献</u> (1) Syōno, J, 気象集誌, (31) (1953)
(2) Francis, J. R. D ら, Proc. Roy. Soc. London, A332 (1973)
(3) Meland, N ら, Geografiska Annaler, 48A (1966)