II-72　土石流における運動量輸送機構について

九州大学工学部　正　員　○橋本　晴行
九州大学工学部　正　員　　椿　東一郎
九州大学大学院　学生員　　戸田　和彦

まえがき；土石流のような粗粒子を高濃度に含む流れでは、粒子の接触による運動量輸送が卓越していることより、Bagnold[1]やDementyev[2]らは均一粒径の2粒子衝突を基本として、砂粒子間に働く応力を求めている。しかし彼らの理論には多くの問題点を含んでおり、その改善の第一歩として、本研究は彼らの理論を基本としながらも砂粒子間の運動量輸送としてさらに摩擦によるものを考慮して、砂粒子間応力を求めた。

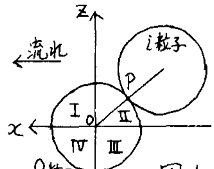


図1

衝突理論；　図1、図2のように0粒子に対して相対的に速いi粒子がP点で衝突したとする。そのとき、0粒子はi粒子から図2のような力を受けi粒子はその反作用として逆向きの力を0粒子から受ける。従って各粒子の運動方程式は、平野・岩元[3]らによると

$$m\frac{d\vec{v_0}}{dt}=-F\vec{n_0}+\mu F\vec{S_0}+\vec{F_0}'\ ,\qquad m\frac{d\vec{v_i}}{dt}=F\vec{n_0}-\mu F\vec{S_0}+\vec{F_i}' \qquad \cdots\cdots①$$

となる。ここに$m=\frac{\pi}{6}d^3(\sigma+\frac{\rho}{2})$、$\vec{v_0}$と$\vec{v_i}$は0, i粒子の速度ベクトル、FはP点での法線方向衝突力、μは摩擦係数、$\vec{n_0}$は0P方向の単位ベクトル、$\vec{S_0}$は摩擦力の向きを表わす単位ベクトル。$\vec{F_0}'$と$\vec{F_i}'$は衝突力以外の外力。①式を解いて、

$$m(\vec{v_0}'-\vec{v_0})=-\int_0^\tau F(\vec{n_0}-\mu\vec{S_0})dt+\int_0^\tau\vec{F_0}'dt\sim-\int_0^\tau F(\vec{n_0}-\mu\vec{S_0})dt \qquad \cdots\cdots②$$

$$m(\vec{v_i}'-\vec{v_i})=\int_0^\tau F(\vec{n_0}-\mu\vec{S_0})dt+\int_0^\tau\vec{F_i}'dt\sim\int_0^\tau F(\vec{n_0}-\mu\vec{S_0})dt \qquad \cdots\cdots③$$

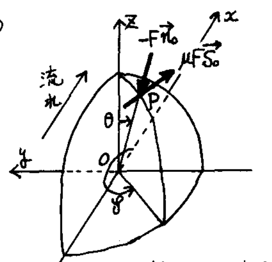


図2, 0粒子における座標

となる。ここに$\vec{v_0}'$と$\vec{v_i}'$は衝突後の速度、τは衝突時間を表わす。そして反発係数eを導入すると、

$$(\vec{v_i}'-\vec{v_0}')\cdot\vec{n_0}=-e(\vec{v_i}-\vec{v_0})\cdot\vec{n_0} \qquad \cdots\cdots④$$

となる。衝突中$\vec{n_0}$と$\vec{S_0}$の向きが変化しないと仮定すれば、②、③、④より、各0、i粒子の運動量変化は

$$m(\vec{v_0}'-\vec{v_0})=\frac{m}{2}(1+e)\{(\vec{v_i}-\vec{v_0})\cdot\vec{n_0}\}(\vec{n_0}-\mu\vec{S_0}) \qquad \cdots\cdots⑤$$

$$m(\vec{v_i}'-\vec{v_i})=-\frac{m}{2}(1+e)\{(\vec{v_i}-\vec{v_0})\cdot\vec{n_0}\}(\vec{n_0}-\mu\vec{S_0}) \qquad \cdots\cdots⑥$$

となる。　なお$\vec{S_0}$はi粒子の0粒子に対する相対速度差の、P点での接平面上への正射影により決定できる。即ち

$$|\vec{S_0}|=1 \quad \vec{n_0}\cdot\vec{S_0}=0\ ,\quad (\vec{v_i}-\vec{v_0})\cdot\vec{n_0}\times(\vec{v_i}-\vec{v_0})=0 \qquad \cdots\cdots⑦$$

である。⑦式を$(\vec{v_i}-\vec{v_0})$のx成分が他の成分に対して卓越している条件で解くと、$\vec{n_0}=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$として、

$$\vec{S_0}=\{(\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta)^{1/2},\ -\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi/(\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta)^{1/2},\ -\cos\theta\sin\theta\cos\varphi/(\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta)^{1/2}\} \qquad \cdots\cdots⑧$$

となる。

単位時間当りの衝突回数；0粒子にθ、φの角度で衝突する単位時間当りの回数$n_{\theta\varphi}$は、流れのせん断抵抗が、$C=C_*$（最密充てん濃度）で無限大になることを考慮して、

$$n_{\theta\varphi}=\alpha|\vec{v_i}-\vec{v_0}|/a \qquad \cdots\cdots⑨$$

と仮定する。ここにaは平均自由分散距離、αは比例係数である。従って$\theta\sim\theta+d\theta$、$\varphi\sim\varphi+d\varphi$の間の角度で衝突する回数は

$$dn=-\alpha\frac{\vec{v_i}-\vec{v_0}}{a}\cdot d^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\vec{n_0}\cdot l \qquad \cdots\cdots⑩$$

である。ここにlは単位面積当りの粒子数である。

0粒子が上層粒子から受ける平均衝突力$\vec{G_0}$；理論の展開を単純化するため次のような仮定を設ける。(i)衝突直前の粒子はその地点の流れになじんでいる。従って0粒子の中心からi粒子の中心へのベクトルを$d\vec{r}$とすると

$$\vec{v_i}=\vec{v_0}+(d\vec{r}\cdot\nabla)\vec{v} \qquad \cdots\cdots⑪$$

となる。ここに$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$である。(ii)注目する粒子に対して相対的に速い粒子（上層粒子）はその粒子のⅡ象限（図1）で衝突する。即ち$0\leqq\theta\leqq\pi/2$、$\pi/2\leqq\varphi\leqq3\pi/2$である。(iii)注目する粒子に対して相対的に遅い粒子（下層粒子）はその粒子のⅣ象限で衝突する。即ち$\pi/2\leqq\theta\leqq\pi$、$-\pi/2\leqq\varphi\leqq\pi/2$である。

これらの仮定と⑤, ⑩, ⑪式より, 0粒子の受ける力は

$$\vec{G}_0=\int m(\vec{v}_0'-\vec{v}_0)dn=-\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\alpha}{2}md^2(1+e)\frac{\ell}{a}\left\{(d\vec{r}\cdot\nabla)\vec{v}\cdot\vec{n}_0\right\}^2(\vec{n}_0-\mu\vec{S}_0)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \qquad \text{------⑫}$$

となる。流れは2次元等流であるとすれば

$$(d\vec{r}\cdot\nabla)\vec{v}=d\cos\theta\frac{du}{dz}\vec{i} \qquad \text{------⑬}$$

となり, $a=\{(C_*/C)^{1/3}-1\}d$, $\ell=(C/C_*)^{2/3}\frac{1}{d^2}$ であるから,

$$\vec{G}_0=-\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\alpha}{2}md(1+e)\cos^2\theta\sin^3\theta\cos^2\varphi(\vec{n}_0-\mu\vec{S}_0)\frac{(C/C_*)^{2/3}}{(C_*/C)^{1/3}-1}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 d\theta\, d\varphi \qquad \text{------⑭}$$

となる。$\vec{G}_0=(G_x, G_y, G_z)$として積分を実行すると,

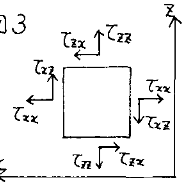
$$G_x=\frac{\alpha}{2}md(1+e)\left(\frac{\pi}{24}+0.154\mu\right)\frac{(C/C_*)^{2/3}}{(C_*/C)^{1/3}-1}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 \qquad \text{------⑮}$$

$$G_y=0 \qquad \text{------⑯}$$

$$G_z=-\frac{\alpha}{2}md(1+e)\left(\frac{\pi}{24}-0.111\mu\right)\frac{(C/C_*)^{2/3}}{(C_*/C)^{1/3}-1}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 \qquad \text{------⑰}$$

となる。0粒子は下層粒子からも同じ大きさで向きが反対の力を受ける。

図3



砂粒子間応力テンソル$\begin{pmatrix}\tau_{xx} & \tau_{zx}\\ \tau_{zx} & \tau_{zz}\end{pmatrix}$ (図3); 応力テンソルは対称テンソルであり, τ_{zx}やτ_{zz}に寄与する衝突角度は$0\leqq\theta\leqq\theta_c$とし, τ_{xz}やτ_{xx}に寄与する衝突角度は$\theta_c\leqq\theta\leqq\pi/2$と仮定する。そして$\theta_c$は$\tau_{zx}=\tau_{xz}$となるように決定する。従って単位面積当りの砂粒子数が$(C/C_*)^{2/3}\cdot 1/d^2$であるから応力テンソルは

$$\tau_{xx}=\int_{\theta=\theta_c}^{\pi/2}\int_{\varphi=\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\alpha}{2d}m_0(1+e)\cos^2\theta\sin^3\theta\cos^2\varphi\left\{\sin\theta\cos\varphi-\mu(\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta)^{1/2}\right\}\frac{(C/C_*)^{4/3}}{(C_*/C)^{1/3}-1}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 d\theta\, d\varphi \qquad \text{---⑱}$$

$$\tau_{xz}=\int_{\theta=\theta_c}^{\pi/2}\int_{\varphi=\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\alpha}{2d}m_0(1+e)\cos^3\theta\sin^3\theta\cos^3\varphi\left\{1+\mu\frac{\sin\theta\cos\varphi}{(\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta)^{1/2}}\right\}\frac{(C/C_*)^{4/3}}{(C_*/C)^{1/3}-1}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 d\theta\, d\varphi \qquad \text{------⑲}$$

$$\tau_{zx}=-\int_{\theta=0}^{\theta_c}\int_{\varphi=\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\alpha}{2d}m_0(1+e)\cos^2\theta\sin^3\theta\cos^2\varphi\left\{\sin\theta\cos\varphi-\mu(\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta)^{1/2}\right\}\frac{(C/C_*)^{4/3}}{(C_*/C)^{1/3}-1}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 d\theta\, d\varphi \qquad \text{---⑳}$$

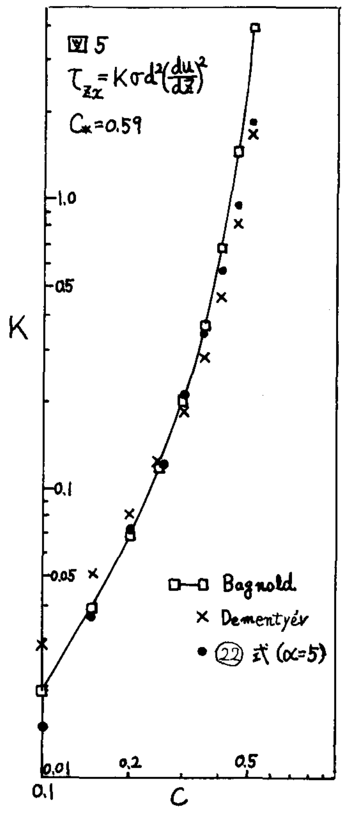
$$\tau_{zz}=-\int_{\theta=0}^{\theta_c}\int_{\varphi=\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\alpha}{2d}m_0(1+e)\cos^3\theta\sin^3\theta\cos^2\varphi\left\{1+\mu\frac{\sin\theta\cos\varphi}{(\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta)^{1/2}}\right\}\frac{(C/C_*)^{4/3}}{(C_*/C)^{1/3}-1}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 d\theta\, d\varphi \qquad \text{------㉑}$$

となる。ここに$m_0=\frac{\pi}{6}d^3\sigma$である。有効垂直応力$p$を考えるときは, $p=-\tau_{zz}|_{m_0\to m}$となる。

計算結果; 砂粒子($\sigma=2.65$)について計算した結果によると, μとτ_{zx}/pの関係は図4のように, μが大きくなればτ_{zx}/pも大きくなることが分る。$\mu=0.25$のとき$\tau_{zx}/p=0.797$となり, 従来経験的に求められていた値に近い値が得られる。そのとき$\theta_c=43.7°$であり, $e\sim 1$とすれば

$$\tau_{zx}=0.026\alpha\sigma d^2\frac{(C/C_*)^{4/3}}{(C_*/C)^{1/3}-1}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 \quad , \ p=\tau_{zx}/0.797 \qquad \text{---㉒}$$

となる。ここで得られたせん断応力がBagnoldの式の値と同程度であるためには, $\alpha=5$である必要がある(図5)。



なお㉒式を導くに当り, いくつかの仮定がなされたが, その中でも⑨, ⑬式は物理的に問題であり, 今後の検討を要す。

参考文献; (1) Bagnold: Proc. Roy. Soc. A. Vol. 225, 1954
(2) Dementyév: Fluid Mech. Soviet Res. Vol. 4 1975
(3) 平野, 岩元, 渡渡: 第22回水理講演会論文集 1978

謝辞; 本研究に当り藤田和夫氏, 中村哲巳氏に多大の助力を得た。ここに記して謝意を表す。