II-70　　流体を含む粒子流の流動機構に関する研究(2)

立命館大学理工学部　正員　大同淳之
パシフィック・コンサルタント　正員　加藤一平
立命館大学大学院　学生員○山野邦明

1．はしがき　Newton流体を含む粒子流のせん断機構について、バグノルド[1]は、せん断力τと法線応力Pとの間に　$\tau = P\tan\alpha$　なる関係があるとし、粒子の慣性が支配的な領域に対して(1)式を、流体の粘性が支配的な領域に対して(2)式を提案した。

$$P = K'\sigma(\lambda D)^2\left(\frac{du}{dy}\right)^2\cos\alpha \quad ---(1), \qquad \tau = \beta\lambda^{\frac{3}{2}}\eta_0\left(\frac{du}{dy}\right) \quad ---(2)$$

ここで、K', β；係数　σ；粒子密度　D；粒径　λ；線濃度　α；粒子衝突角　η_0；流体の粘度
二重円筒型回転粘度計を用いて、粒子流のせん断試験を行ない、前報[2]において、これらの流動式の検討を行なった。その結果、バグノルドの理論に基づいた場合、粒径、濃度、流動層厚の変化に伴ない、係数、限界レイノルズ数が変化することを得た。これは、バグノルドのモデルが、粒子の回転、接触まさつ、流体と粒子の相互作用を考慮していないことによるものと思われる。本報では、粒子存在による影響、特に粒子の回転、接触まさつの影響を考慮し、粒子流の流動機構の検討を行なう。

2．基礎方程式　粒子流について次の仮定を行なう。(1)粒子流を流体相と粒子相の2相流とし、重ね合わせが成りたつものとする。(2)粒子は、均一剛体球であり、質量をM、粒径をDとする。(3)粒子は、流体力の作用をうけず、粒子の運動は、その履歴に関係しない。(4)外力の成す仕事は、運動エネルギーを増加させた後、完全に散逸する。基礎方程式として、連続方程式、運動方程式、角運動方程式は、次のように表わされる。

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad ---(3) \qquad \rho\frac{du_i}{dt} = \rho b_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} \quad ---(4) \qquad I\frac{dW_{ik}}{dt} = e_{ijk}e_{i\ell m}\sigma_{\ell m} \quad ---(5)$$

ここで、ρ；みかけの密度　b_i；体積加速度　σ_{ij}；応力テンソル　W_{ij}；粒子の回転速度テンソル　I；単位体積当りの慣性モーメント。さらに、エネルギー保存則は、次のように表わされる。

$$\frac{d}{dt}[K + U] = \dot{Q} + \dot{W} \quad ---(6)$$

ここで、K；運動エネルギー　U；内部エネルギー　Q；吸収熱量　W；外力の成す仕事　で、それぞれ次のようになる。

$$K = \int_V\left[\frac{1}{2}\rho u_i u_i + \frac{1}{4}I W_{ij}W_{ij}\right]dV \quad ---(7) \qquad U = \int_V \rho\varepsilon\, dv \quad ---(8)$$

$$\dot{Q} = \int_V g\, dv - \int_S h_i n_i\, ds \quad ---(9) \qquad \dot{W} = \int_V \rho b_i u_i\, dv + \int_S \sigma_{ij} n_j u_i\, ds \quad ---(10)$$

ここで、ε；エネルギー密度　g；発生熱　h_i；熱流束　n_i；面積要素dsの単位法線ベクトル
上の仮定にしたがって散逸エネルギーΦを、これらの関係式から導びくと次のようになる。

$$\Phi = \sigma_{ij}^D D_{ij} + \sigma_{ij}^A R_{ij} \qquad (\because\ \sigma_{ij}^D = \sigma_{ij}^S - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk},\ R_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^A - W_{ij}) \quad ---(11)$$

ここで、σ_{ij}^D；偏差応力　$D_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^S$；変位速度テンソル　R_{ij}；独立回転速度　また、Sは、テンソルの対称化、Aは、交代化を表わす。

3．粒子流の流動式　図1に示すような中心距離bDだけ離れて運動している1組の粒子を考える。
流体相の散逸エネルギーは、$\Phi_w = \sigma_{w\,ij}^D D_{ij}$　で与えられ、粘性流体の偏差応力は、$\sigma_{w\,ij}^D = \partial\Phi_w/\partial D_{ij} = 2\eta_r\eta_0$ として求まる。したがって、相対粘度η_rを　$\eta_r = 1 + \frac{D}{S} = 1 + \lambda$　とおくと、

$$\sigma_{w\,ij} = -p\,\delta_{ij} + 2(1+\lambda)\eta_0 D_{ij} \quad ---(12)$$

なる構成方程式を得る。
一方、粒子の運動と連続モデルとの対応は、$u_i^* = u_i + bD\nu_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$　$W_{ij}^* = W_{ij}$　で与えられる。接触点($S = 0$)における相対速度v_iは、

$$v_i = (u_i^* - \frac{1}{2}D\nu_j W_{ij}) - (u_i + \frac{1}{2}D\nu_j W_{ij}) = D\nu_j(D_{ij} + R_{ij})$$

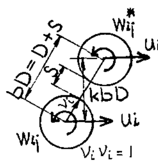

図1

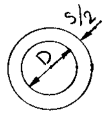

図2

であり、さらに不規則性を考慮して、2乗平均をとると、　$\upsilon = KD\sqrt{D_{ij}D_{ij}+R_{ij}R_{ij}} = KDG$　を得る。次に、接触力 f_K（K=1〜N）による圧縮率 r の仮想仕事を考え，これが連続体としての巨視的圧力による粒子実質部分の仮想仕事に等しいとして、　$\frac{\Sigma f_K}{\pi D^2} \times r \times \frac{\pi}{6} D^3 \times \frac{\rho}{m} = \frac{1}{6} N \bar{f} \frac{\rho}{m} D r = C r$　より、　$\bar{f} = \frac{6mc}{N\rho D} p$　を得る。したがって、単位体積中の散逸エネルギー Φ_s は、まさつ係数を μ として、　$\Phi_s = \frac{1}{2}\Sigma \mu f_K \upsilon \frac{\rho}{m} = 3K\mu CpG$　となる。又、ここで用いられた圧力は、静的な圧力と、粒子の衝突による動的圧力 p' とからなっている。p' は、図2に示す球の壁面に働く圧力に等しいと考え，運動量の伝達により、$p' = 2m\upsilon\frac{\upsilon}{S}\frac{1}{\pi(bD)^2} = \frac{1}{3}K^2\lambda\sigma D^2 G^2$　を得る。したがって、動的な圧力による散逸エネルギーは、（13）式で与えられ，したがって、（11）式より $\sigma_{s\,ij}^{D}$ および $\sigma_{s\,ij}^{A}$ を求めると、（14）式，（15）式を得る。

$$\Phi_s = K^3 \mu C \lambda \sigma D^2 G^3 \quad --- (13)$$

$$\sigma_{s\,ij}^{D} = \frac{1}{3}\frac{\partial \Phi}{\partial D_{ij}} = K^3 \mu C \lambda \sigma D^2 G D_{ij} \quad --- (14)$$

$$\sigma_{s\,ij}^{A} = \frac{1}{3}\frac{\partial \Phi}{\partial R_{ij}} = K^3 \mu C \lambda \sigma D^2 G R_{ij} \quad --- (15)$$

ここで，流体相の応力と重ね合わせ，　$U_i = U(y)$　$W_{ij} = \omega$　なる流れの場に適すると，$R_{ij} = 0$　として，

$$\sigma_{xy} = \tau_y + (1+\lambda)\eta_0 \frac{du}{dy} + \frac{1}{6}K^2 C \lambda \sigma D^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \tan\theta \quad --- (16)$$

$$\sigma_{yy} = -p + \frac{1}{6}K^2 C \lambda \sigma D^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \quad --- (17)$$

$$\tan\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} K\mu \quad --- (18)$$

結果は、バクノルドの流動式に類似しているが、粒子の回転、接触まさつの影響が考慮された。これより，粒子が回転すると係数が減少すること、$\tan\theta$ は、内部まさつ角に対応し，粒子のまさつ係数、濃度に関係することなどがわかる。図3，図4に、実測値の無次元表示を示す．これから、K = 0.38　を得る。　又、　$\tan\theta = 0.70$ を得た。慣性力と粘性力との比をとり、無次元化したとき、限界無次元ひずみ速度（限界Re数）は、Re = 40　であった。

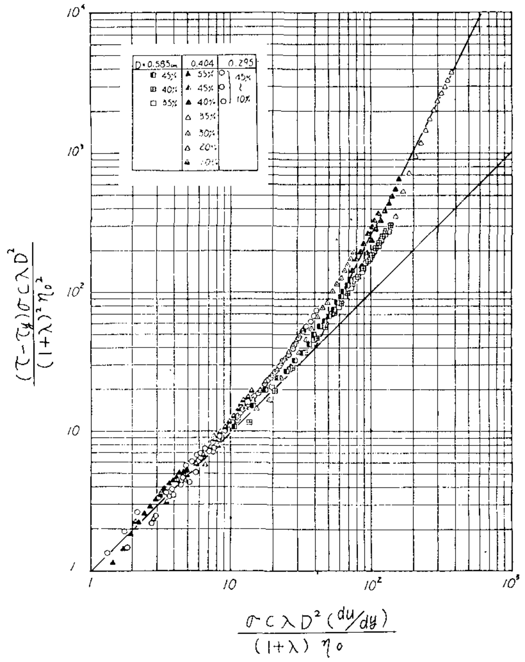

図3　(16)式による無次元表示

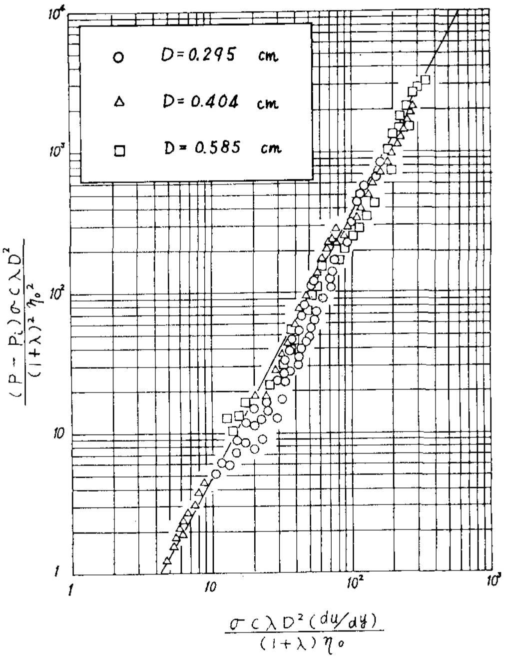

図4　(17)式による無次元表示

参考文献　（1）R.A. Bagnold ; Proc. Roy. Soc. A, Vol 225, 1954, P.P. 49 〜 63

（2）大同・加藤 ; 土木学会第33回年次学術講演会講演概要集，1978，P.P. 580〜581