

(財)電力中央研究所 正会員 O 尾崎幸男・秋元 保

1. はじめに

貯水池に洪水が流入すると、ダム地質におけるゲート放流操作に伴って貯水池内に定常波が生ずるようになる¹⁾。このような定常波の影響で放流量が変動し、下流河川に対して過大な放流を引き起こし危険な事態を招く恐れがある。また、定常波の問題はダムゲート自動制御化にとっても解決すべき課題となっている²⁾。

本研究は、ダムにおける洪水放流操作を最適に行うにあたって必要となる貯水池内定常波の一般的特性を明らかにしようと試みたものである。

2. 波動方程式と一般解

貯水池に洪水が流入すると、流れの性格よりも波動性が卓越し貯水池内に定常波が生ずる。図-1は当時で行った水殿貯水池における定常波の実測例である³⁾。

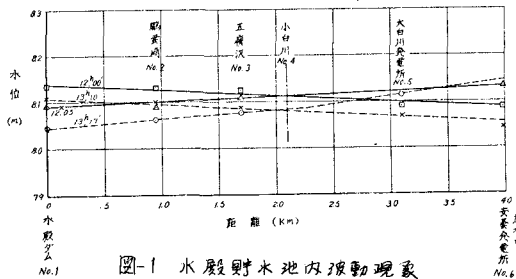


図-1 水殿貯水池内波動現象

貯水池内の定常波は、その波高が水深に比べて非常に小さいことから以下の線型方程式によって解析することが⁴⁾できる。ただし、 x 軸は堰下方向を正とする。

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial Vv}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2} f \frac{V^2}{h} \left(2 \frac{v}{V} - \frac{\eta}{h} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial v \eta}{\partial x} + \frac{\partial V \eta}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

ここで、 $\bar{h}(x, t)$ は定常時局所水深 $h(x)$ に洪水による上昇水位 $\Delta h(x, t)$ を加えた局所平均水深、 $\eta(x, t)$ は波動による水面変位、 f は摩擦抵抗係数、 $V(x, t)$ は流速の波動成分、 $v(x, t)$ は流速の波動成分、である。

ここで、長さ L 、底勾配 S_b の湛水池領域においては、

$$O\left(f \frac{L}{h}\right) \ll O(1), \quad O\left(\frac{V}{\sqrt{gh}}\right) \ll O(1), \quad O\left(\frac{\Delta h}{h}\right) \ll O(1),$$

とみなすことができるので、このとき、(1)、(2)式は、

$$\frac{\partial v \eta}{\partial t} + g h \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial v \eta}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

と簡単化される。この2式から次式が導かれる。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \eta}{\partial x} \right). \quad (4)$$

上式は、一様横の水路において水深 h のみが変化するときの一般的な波動方程式である(Lamb⁵⁾, p. 274)。

いま、 x 軸の原点を貯水池と湖端にとり、局所水深を、 $h(x) = S_b \cdot x$ 、とすると(4)式の一般解は、

$$\eta(x, t) = \{C_1 J_0(\xi) + C_2 Y_0(\xi)\} e^{i\sigma t + i\epsilon}, \quad (5)$$

と表わされる。ここで、 $\sigma = 2\pi/T$ は角振動数、 T は周期、 $i = \sqrt{-1}$ 、 $\xi = 2\kappa^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$ 、 $\kappa = \sigma^2 / (g S_b)$ で、 $J_0(\xi)$ 、 $Y_0(\xi)$ はそれぞれ第一種、第二種のゼロオーダーのBessel関数、 C_1 、 C_2 、 ϵ は任意定数である。

3. 放流量を制御するゲート操作による定常波

放流量調整を行うと、図-2のように貯水池内の中央付近に節点と定常波が生ずる。

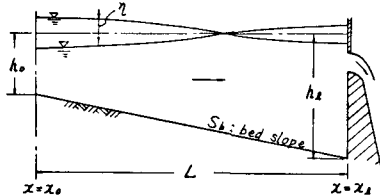


図-2 放流量制御の場合の定常波

この定常波の固有周期は次の条件、

$$x = x_0 \text{ および } x_L \text{ で } \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

から求められる。上式は完全反射の条件であり、 $x = x_L$ では各当条件といえる。しかし、 $x = x_0$ においては、この地点に上池ダムがあれば成り立つが、 $x = x_0$ より上流が遷移領域あるいは河川領域の場合には近似的条件となっている。

さて、(5)式を(6)式に代入し、若干の計算の結果、定常波の固有周期を求める次式を得る。

$$J_1(\xi_0) Y_1(\xi_L) - J_1(\xi_L) Y_1(\xi_0) = 0. \quad (7)$$

ただし、 $J_1(\xi)$ 、 $Y_1(\xi)$ は第一種、第二種のBessel関数で、 $\xi_0 = 2\kappa^{\frac{1}{2}} x_0^{\frac{1}{2}}$ 、 $\xi_L = 2\kappa^{\frac{1}{2}} x_L^{\frac{1}{2}}$ である。

ここで、 ξ_0 、 $\xi_L > 1$ の場合を考えると、次の漸近展

南式を使うことができた (Watson⁶⁾, p.199)。

$$\begin{aligned} J_0(\xi) &\approx \cos\left(\xi - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) / \sqrt{\pi\xi/2} \\ Y_0(\xi) &\approx \sin\left(\xi - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) / \sqrt{\pi\xi/2} \end{aligned} \quad (8)$$

こゝに, $\nu = 0, 1, 2, \dots$

(8)式を(7)式に代入し固有周期を求めると,

$$T = 2\pi/\sigma \approx (4/S_b)(\sqrt{h_2/g} - \sqrt{h_0/g}), \quad (9)$$

となる。いま, 平均水深を h_m とし平均周期 T_m を,

$$T_m = 2L/\sqrt{gh_m} = (2\sqrt{2}/S_b)(h_2 - h_0)/\sqrt{g(h_2 + h_0)}, \quad (10)$$

と定義すると, 無次元固有周期は,

$$\frac{T}{T_m} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\frac{h_2}{h_0} + 1} \left(\sqrt{\frac{h_2}{h_0}} - 1 \right)}{\frac{h_2}{h_0} - 1}, \quad (11)$$

となる。この式と実測値との比較をしたのが図-3であり, 両者はかなり良い一致を示している。

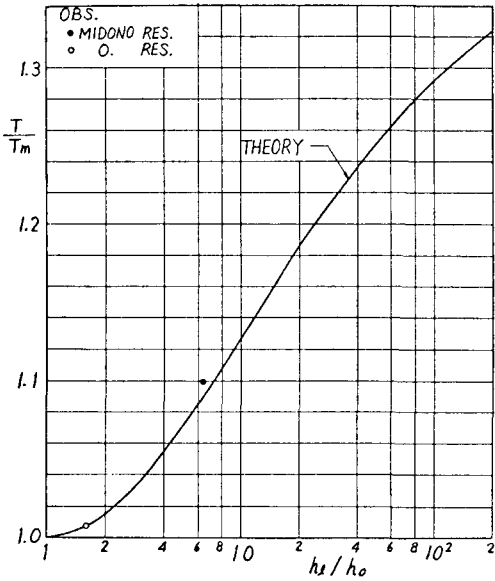


図-3 式(11)と実測値との比較

(11)式において, 野水池形状の極限状態を考えると,

$$\lim_{\frac{h_2}{h_0} \rightarrow 1} \frac{T}{T_m} = 1, \quad \lim_{\frac{h_2}{h_0} \rightarrow \infty} \frac{T}{T_m} = \sqrt{2},$$

故に, $1 \leq T/T_m \leq \sqrt{2}$. (12)

4. 下流端水位一定とするゲート操作による定常波

この場合は図-4のような定常波が生ずる。

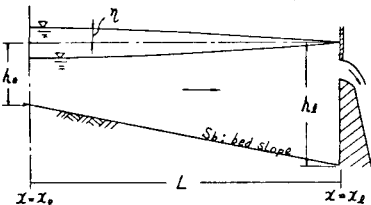


図-4 下流端水位一定の場合の定常波

この定常波の固有周期は,

$$X = X_0 \text{ で } \partial\eta/\partial X = 0, \quad X = X_L \text{ で } \eta = 0, \quad (12)$$

の条件から求められる次のようになる。

$$T \approx (8/S_b)(\sqrt{h_2/g} - \sqrt{h_0/g}). \quad (13)$$

また, 基準周期 $T_m = 4L/\sqrt{gh_m}$ も(10)式の2倍となり, 結局, 無次元固有周期は(11)式に一致する。

次に, 図-4のような定常波が生ずると, 放流量が変動する。この放流量の変動分(振幅)を求め無次元表示すると次式のようなのである(解析過程は文献1と参照されたい)。ただし, q_A は単位幅当りの変動放流量の振幅, q_0 は $X=X_0$ における定常波の振幅である。

$$\frac{q_A}{q_0\sqrt{gh_m}} = \left[\frac{4h_2/h_0}{(h_2/h_0 + 1)^2} \right]^{1/2} \quad (14)$$

上式と実測値との比較を示すと図-5のようになる。この図から, 実際の野水池においては, 定常波の振幅が数センチであっても放流量の変動振幅は数センチから数メートルに達し周知域を引き起こすことが予想される。

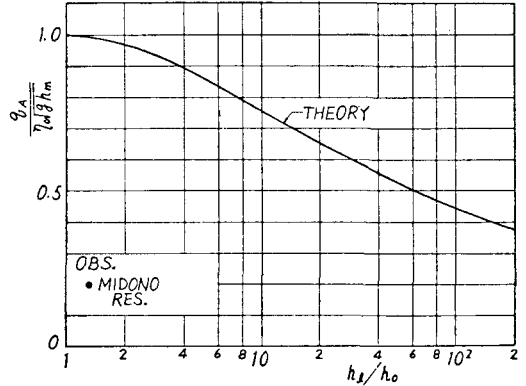


図-5 式(14)と実測値との比較

5. おそひ

以上, 理論解析によって野水池に生ずる定常波の一般特性を明らかにすることができた。今後は, このような定常波の特性を考慮したダム放流操作の確立が望まれる。

参考文献 1)秋元 保・尾崎幸男, 電研報告378016, 1978, 2)蔭金正雄・井上和政, 電力土木No.156, 1978, pp.81-87. 3)秋元 保・工藤正介, 電研報告376015, 1977. 4)尾崎幸男・秋元 保, 才23回水誌, 1979, pp.27-34. 5) Lamb, H., "Hydrodynamics", 6th edition, Cambr. Univ. press, 1932. 6) Watson, G. N., "Theory of Bessel Functions", Second edition, Cambr. Univ. press, 1966.