II-61 Kinematic wave と dynamic wave の特性について

京都大学工学部 正 員 井上 和也
京都大学工学部 正 員 岩佐 義朗
京都大学大学院 学生員 西畑 雅司

開水路非定常流の取扱いにおいて、kinematic wave理論およびそれによる流れの解析は、従来主として、運動方程式の非定常項および慣性項が無視されうるような近似系に適用されている。またそのような近似が可能なのは、水深方向の長さのスケールと流れ方向のそれとの比が、河床こう配に比して十分小さいときであるということが林[1]によって導かれている。一方、dynamic wave理論は、上述の各項を無視しない場合に構成される理論で、微小擾乱の伝播とそれによる影響の波及が、特性曲線を用いた表現によって示される。 本報は、流れにおけるkinematic waveとdynamic waveの役割を、上記のような近似を行なわない系を対象として考察しようとするものである。簡単のため水路は広長方形断面とし、径深は水深で近似されうるとしておく。

1. 基礎式およびその線型解の特徴

基礎式として、つぎの連続式とエネルギー式を考える。

$$\frac{\partial h}{\partial t}+v\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad \cdots\cdots(1) \qquad \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial x}=S_0-S_f \quad \cdots\cdots(2)$$

いま、定常・等流の状態($v=v_0$, $h=h_0$ および $S_0=S_f$)を考え、これに微小な擾乱が加った流れを考える。すなわち、$h=h_0+\eta$, $v=v_0+u$ とするとき、η および u は十分小さいものとし、さらに抵抗則としてManning公式($S_f=n^2v^2/h^{4/3}$)を用いて、(1)および(2)式を線型化し、これらの2式から v を消去すると、

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+2v_0\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial t}-(gh-v_0^2)\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+2\lambda\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{5}{3}v_0\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)=0 \qquad (3)$$

が得られる($\lambda=gS_0/v_0$)。ここで、初期条件を、$t=0$, $x>0$ で、$\eta=\partial\eta/\partial t=0$ とし、また境界条件を、$t>0$ $x=0$ で $\eta=f(t)$ ($\int_0^\infty f(t)\,dt$ は存在するとする)とするとき、擾乱の波先および擾乱の主たる部分での近似解は、それぞれつぎのように導かれている[2]。

(i) 擾乱の波先:

$$\eta=e^{-(1-\frac{2}{3}F_r)\frac{\lambda x}{v_0+\sqrt{gh_0}}}f\left(t-\frac{x}{v_0+\sqrt{gh_0}}\right)\left\{1+O\left(t-\frac{x}{v_0+\sqrt{gh_0}}\right)\right\},\quad \left(t>\frac{x}{v_0+\sqrt{gh_0}}\right) \qquad (4)$$

また、$t\leqq x/(v_0+\sqrt{gh_0})$ のときには、$\eta=0$ である。ここで、$F_r=v_0/\sqrt{gh_0}$ である。(4)式は、$F_r<1$ の仮定のもとに導かれているが、擾乱の波先の近くだけに限れば、この条件は必要でない。(4)式より明らかなように、擾乱の波先は、$t=x/(v_0+\sqrt{gh_0})$ すなわち dynamic waveの伝播速度で伝わることになる。また、さらに擾乱の波先では、$\eta\propto e^{-(1-\frac{2}{3}F_r)\lambda t}$ と表わされるから、$F_r<3/2$ のときには擾乱は減衰し、その減衰の時間スケールは $1/\lambda=v_0/gS_0$ であるといえる。このことから、(1)および(2)式による非定常流の数値解析法においてよく現われるVasilievの条件、すなわち差分の時間間隔を Δt とするとき $\Delta t<v_0/gS_0$ という条件は、Δt が dynamic wave の伝播速度で伝わる擾乱の減衰の時間スケールより小さくなければならないと解釈される。さらに、差分法において摩擦項を、現在の時間 t だけでなく計算されるべき時間 $t+\Delta t$ でも評価すれば、Vasilievの条件が現われないのは、$t+\Delta t$ でのdynamic waveも考慮されるためとみなすことができる。

一方、$F_r>3/2$ のときには、波先において η は伝播に伴って増大し、段波の発生につながると予想される。しかし、いまの場合、線型解であるから個々のdynamic waveの伝播速度 $v_0+\sqrt{gh_0}$ で近似されており、一定であるから、同じ族の dynamic wave の交差による段波の発生機構は、はじめから除外されている。$F_r>3/2$ は後述

するように、流れの不安定の条件と一致するものである。

(ii)攪乱の主たる部分：$t \gg 1/\lambda$ のとき，(3)式の解より、η の最大値はつぎのように近似される。

$$\eta_{max} \approx \left(\frac{\lambda}{2\pi t}\right)^{1/2} \frac{5F_r}{3(1-4/9F_r^2)^{1/2}} \int_0^\infty f(t)\,dt \tag{5}$$

ここで、$x=(5/3)v_0 t$ である。この結果より、$t \gg 1/\lambda$ のとき η の最大値すなわち攪乱の主たる部分は、kinematic wave の伝播速度（$5v_0/3$）で流下し、また最大値は $1/\sqrt{t}$ に比例して減小することが分る。$t \gg 1/\lambda$ の条件は、kinematic wave 理論が適用されうる時間スケールは、dynamic wave の減衰の時間スケール $1/\lambda$ より大きいことを意味するものである。いまの場合、kinematic wave の適用性に関して林[1]の導いたパラメータ σ と $\sigma \ll 1$ の条件は、$\sigma \equiv h_0/S_0 L \ll 1$（L：x方向の長さのスケール）と表わされるが、kinematic wave の時間スケールとして $T_* = L/v_0$ とするとき $\sigma = 1/(F_r^2 T_* \lambda)$ であるから、$\sigma \ll 1$ は $T_* \gg 1/\lambda$ を意味することになる。すなわち、時間スケールでみたkinematic waveの適用条件は、林の条件と同一であると考えることができる。また、最大値が伝播に伴って $1/\sqrt{t}$ に比例して減小することは、移流分散方程式の理論解と相似な結果であって、(3)式の才3項（$\propto \partial^2 h/\partial x^2$）によって η が分散されるとみなすことができよう。

2. 流れの不安定性

流れが不安定になるのは、攪乱の主たる部分を伝えるkinematic waveの伝播速度が、攪乱の波先を伝えるdynamic wave のそれより大きくなったときであることが指摘されている[2]。このことを、摩擦項の表示を一般的な形（$S_f = S_f(h, v)$）にして導き、従来の結果と一致することを示そう。

(1) kinematic wave と dynamic wave：dynamic wave の伝播速度 w_d は、摩擦項に関係しないから、先と同様に $w_d = v + \sqrt{gh}$ である。一方、kinematic wave の伝播速度 w_k は、$S_0 = S_f(h, v)$ と(1)式より、$w_k = v - (S_{fh}/S_{fv})h$ となる（$S_{fh} = \partial S_f/\partial h$, $S_{fv} = \partial S_f/\partial v$, $S_{fh} < 0$, $S_{fv} > 0$ とする）。したがって，$w_k > w_d$ の条件は、

$$F_r > -(v/h)(S_{fv}/S_{fh}) \tag{6}$$

となる。いうまでもなく、抵抗則としてManning 公式を用いれば、(6)式は $F_r > 1.5$ となる。

(2)微小攪乱の発達：(3)式に、$\eta = \hat{\eta} e^{ikx+\omega t}$ なる微小な攪乱を代入すれば、次式が得られる。

$$\frac{\omega}{\lambda} = -\left(1 + i\frac{kv_0}{\lambda}\right) \pm \sqrt{1 - \frac{1}{F_r^2}\left(\frac{kv_0}{\lambda}\right)^2 - 2\left(\frac{w_k}{v_0} - 1\right) i \frac{kv_0}{\lambda}} \tag{7}$$

(7)式の ω/λ の一根の実数部はつねに負であるが、他の一根の実数部 $Re(\omega/\lambda)$ は、$kv_0/\lambda \to 0$ のとき $Re(\omega/\lambda) \to 0$ となり、$kv_0/\lambda \to \infty$ のとき $Re(\omega/\lambda) \to -1 + F_r(-S_{fh}/S_{fv})(h_0/v_0)$ となる kv_0/λ について単調な関数である。$Re(\omega/\lambda) > 0$ のとき，攪乱は発達するので、流れは不安定とされる。したがって、その条件は上のことより $-1 + F_r(-S_{fh}/S_{fv})(h_0/v_0) > 0$ であって、これは(6)式の条件と一致する。この不安定の条件はまた、転波列の維持条件と一致する[3]ことが知られているから、結局これらの3条件はすべて一致することになる。

(3) Vedernikov数：平均流速公式が、$v^a = \beta h^{(1+b)} S_0$ と表わされるとき、Vedernikov数 $Ve = (1+b)Mv/\{a(w_d - v)\}$ が1より大きければ、流れは不安定とされている（$M = S(dR/dA)$ であるが、単位幅を考えているいまの場合、$M = 1$ である）。平均流速公式が上式で表わされるとき、kinematic wave の伝播速度は $w_k = d(vh)/dh = \{(1+b+a)/a\} v$ であるから、Ve はつぎのように表わされる。

$$Ve = (w_k - v)/(w_d - v) \tag{8}$$

すなわち，Ve は平均流速に相対的にとられたkinematic wave の伝播速度と dynamic wave のそれとの比と理解することができるとともに、不安定の条件としての $Ve \geqq 1$ は、上記の(1)と同じ意義を有すると考えることができる。

文献／1)林泰造，水工学シリーズ 66-01，昭41／2) Lighthill, Whitham, Proc. Roy. Soc. London, Vol. 229, 1955／3)石原藤次郎、岩垣雄一、岩佐義朗、土木学会論文集、才19号，昭29.