II-60　開水路不定流方程式各項の特性について

山梨大学　工　正　荻原能男
○大学院　学　宮下繁男
大学院　学　岩崎晋平

1. はじめに

最近は電算機による数値計算が自由に実行できるため、洪水追跡・流出解析などにおいて、不定流方程式（いわゆるSaint Venantの方程式）を特性曲線法、差分法、有限要素法などによって数値的に解く方法が紹介されている。しかし、連続の方程式・運動方程式の全項を用いて解くことは解の収束性・安定性に問題があり、またどれほど意味があるのか実用上の問題もある。したがって項を省略することによって簡便に計算をすすめることも多い。

林は微少振幅波理論を用いて河川不定流の特性を明確にし、平均水深をh_0、河床こう配をS_0、波長をLとした場合 $S_0L \gg h_0$の場合はKinematic Wave Model、$S_0L \ll h_0$の場合はGravity Wave Modelで波動を示せることを説明した[1]。最近ではV.M.Ponce、D.B.Simonsによってほぼ林と同様な方法すなわち方程式を線形化して各項のもつ物理的な意味を調べ、波数$\sigma = 2\pi/L$とFroude数Frを用いて、σの小さい時あるいはFrが2に近い時にはKinematic Wave Model、σの大きい時にはGravity Wave Modelが適合することを示した[2]。筆者等は不定流方程式の各項がどのように波動・流れに作用するのかを特性方程式を用いて調べ、洪水追跡・土石流解析・流出解析などにおいて誤った計算をしないよう一つの指針を示そうとした。

2. 重力型波動

不定流方程式の各項に式(1)、(2)に示すように係数N_1、N_2、N_3、M_1、M_2、M_3を乗じて、これ等の値が0または1をとることによって、その特性方程式が示す波動性がどのように変わるか調べよう。水路断面形は長方形として、水深をh、流速をV、河床こう配をS_0、エネルギこう配をS_f、重力の加速度をg、時間をt、河床にそう距離軸をxとすれば、連続の方程式・運動方程式は

$$N_1\frac{\partial h}{\partial t} + N_2V\frac{\partial h}{\partial x} + N_3h\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \cdots\cdots (1) \qquad M_1\frac{\partial V}{\partial t} + M_2V\frac{\partial V}{\partial x} + M_3g\frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f) \cdots\cdots (2)$$

となる。ここで、1) 運動方程式の local inertia term $\partial V/\partial t$、convective inertia term $V\partial V/\partial x$、pressure differential term $g\partial h/\partial x$の三項を省略($M_1 = M_2 = M_3 = 0$)したものをKinematic Wave、2) $M_1 = M_2 = 0$としたものをDiffusion Wave、3) $M_1 = 0$としたものをSteady Dynamic Wave、4) 全項を用いたものをDynamic Wave、5) Dynamic Waveのうち等流状態に近いものをGravity Waveと一般に呼んでいる。さて、式(1)、(2)の特性方程式は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_2}{M_1} + \frac{N_2}{N_1}\right)V \pm \sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{M_2}{M_1} - \frac{N_2}{N_1}\right)V\right\}^2 + \frac{M_3N_3}{M_1N_1}gh} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$M_1\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2N_3h}\left[(M_1N_2 - M_2N_1)V \pm \sqrt{(M_1N_2 - M_2N_1)^2V^2 + 4M_1M_3N_1N_3gh}\right]\frac{dh}{dt} = g(S_0 - S_f) \cdots\cdots (4)$$

となる。式(3)で与えられる重力型波動について次のことが判る。

① M_1とN_1、M_2とN_2、M_3とN_3とは互換性があり、これらの掛る項の間には波動の上から類似性がある。例えば、式(1)の$\partial h/\partial t$と式(2)の$\partial V/\partial t$は式(3)におよぼす効果が同じである。

② $M_2/M_1 = N_2/N_1 = 1$の場合には $dx/dt = V \pm \sqrt{(M_3N_3/M_1N_1)gh}$ となり、上下流に伝播する波速が等しい、この条件が満足されないと上下流に伝播する波速が異なる。

③ $M_2=N_2=0$ とすれば $dx/dt=\pm\sqrt{(M_3N_3/M_1N_1)gh}$ となり、流れの存在しない長波を意味する。

④ ②の条件下で、$M_3=0$、または $N_3=0$ とすれば $dx/dt=V$ となり波動成分がなくなる。

⑤ 連続の方程式の第一項 $\partial h/\partial t$、または運動方程式の第一項 $\partial V/\partial t$ を省略すれば($N_1=0$ or $M_1=0$)、この重力型の波動は存在しない。

3. 定常重力型波動

前述のように $M_1=0$ の場合には重力型波動は存在しない。この場合には次に示す定常重力型波動になる。運動方程式(2)の第一項 $\partial V/\partial t$ を省略して特性方程式を導くと

$$\frac{dx}{dt}=\frac{N_2}{N_1}V-\frac{M_3N_3}{M_2N_1}\frac{gh}{V} \qquad (5)$$

となる。この波について $M_2=M_3=N_1=N_2=N_3=1$ とすれば $dx/dt=(1-1/F_r^2)V$ となり、常流では上流に射流では下流に伝播すること、さらに $N_2=0$ とすると流れの成分がなくなること、他の係数は1として $M_3=0$ または $N_3=0$ とすれば波動成分が消えて流れの成分が残ることなど重力型波動と類似している点があることが判る。この波動において $N_1=0$ すなわち連続の方程式においても時間微分項を省略すれば、この種の波動は存在しなくなる。

4. 拡散型波動

さらに $M_1=M_2=0$ と運動方程式の二項を省略すると上記の波動は定まらず特性方程式は $dx/dt=N_2V/N_1-\infty$ となり波速は ∞ となる。拡散型波動の解析解は速水[3]などによって求められ熱伝導同様に波速は無限大であることが示されている。

5. Kinematic Wave

式(2)で示される運動方程式の左辺全項を省略すれば($M_1=M_2=M_3=0$)、$S_0=S_f$ となり、この等流公式を $V=\alpha h^m\sqrt{S_0}$ と表わして特性方程式を求めると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{N_2}{N_1}V+\frac{N_3}{N_1}mV \qquad (6)$$

となり、前述と全く同じように N_1 が波動の存在性、N_2 が流れ、N_3 が波動に関与していることが判る。

6. まとめ

以上のように、不定流方程式の各項は各々特有の性質を持っている。そのため項を省略して計算をすすめる場合には細心な注意が必要である。これらの項の大略の性質を示すと下のようになる。

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t}}+\boxed{V\frac{\partial h}{\partial x}}+\boxed{h\frac{\partial V}{\partial x}}=0$$

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t}}+\boxed{V\frac{\partial V}{\partial x}}+\boxed{g\frac{\partial h}{\partial x}}=g(S_0-S_f)$$

流れ・波動の存在性　　流れの存在性　　波動の存在性

7. 謝辞・参考文献

本研究は筆者等の他に土橋恵治君(日本住宅公団)の協力を頂いた。謝意を表したい。

1) 林泰造;河川の不定流について、水工学に関する夏期研修会講議集A　PP. 1~20, 昭和41年8月

2) Ponce, V.M. and Simons, D.B.; Shallow Wave Propagation in Open Channel Flow, Proc. ASCE. Vol.103, NO. HY12, Dec. 1977

3) Shoitiro Hayami; On the Propagation of Flood Waves, 京大防災研究所年報 1951年12月