II-53　粒子流の流動式

立命館大学理工学部　正員　大同淳之

1 まえがき　多数の固体粒子を含む流体が流動するとき，まわりの粒子との衝突や粒子間に介在する水などの連続相を通じたせん断力の影響などで，粒子は強い回転を起こす．流動化が進んで流動が激しいときは，粒子の回転が激しく，粒子の接触は圧力を自発するものと思われる．斜面における流動は，こう配が小さく，粒子の粒径が小さいとき（例えば標準砂），あたかも油のように滑らかな流れを呈するが，こう配が急なところでは粒子の回転が顕著で，ときには粒径の篩分けが行なわれ，また流動するにつれて流動の厚さを増すなど，粒子流のもつ特徴が顕著になる．これらの挙動について2,3の解析があるが，いまだ巨視的な取扱いにとどまり，粒子流の固有の特徴を適確に表現できるところまで至っていないように思われる．最近，粒子流の微視的取扱いも行われるようになり，例えば金谷[1]は粒子流の特徴を表現しうる考え方を提案されたが，具体的な例を説明するのには，まだ若干の問題がある．本文も，初期の目的に完全に答えるものではないが，ひずみ速度についての構成式を提案し，それをもとにした平均流速，抵抗則を述べ，さらに粒子の回転について考察した結果を述べる．

2. 粒子流の流動式

i) 構成式　別報[2]に報告するように，水を含む粒子流の構成式を，粒子の回転，接触まさつ，流体との相互作用を考慮して次のように導いた．

$$p_{xx} = -p + 2\eta_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{T_e}{200} \lambda \sigma D^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \tag{1}$$

$$\tau_{xy} = \tau_y + (1+\lambda)\eta_0 \frac{du}{dy} + \frac{1}{6} K^2 C \lambda \sigma D^2 \tan\theta^* \left(\frac{du}{dy}\right)^2, \qquad ここに\ \tau_y = c' + (-p)\tan\theta^* \tag{2}$$

$\tan\theta^*$ は，粒子の回転が流れに従属するとき，$\tan\theta^* = (3\sqrt{10}/10)\mu$, (3) 粒子の回転のないときは，$\tan\theta^* = (2\sqrt{60}/10)\mu$ (4) を得た．ここに p は静水圧，η_0：流体の粘度，T_e：粒子の反撥，まさつ係数に関係する比例定数，λ：粒子の線濃度，σ：粒子の密度，D：粒子の直径，K：粒子の間隔に関係する比例定数，μ：粒子のまさつ係数で，τ_y は，塑性流体とみなしたときの降伏値，$\tan\theta^*$ はまさつ係数はクーロン型で表わしたときのまさつ角に相当する．(1)および(2)式の関係は，従来用いてきたパラメーターにくらべて，極めて良い相関関係を示すことが実験で確められた．

ii) 斜面上の粒子流の流動速度．　斜面上の粒子流の流速は，(2)式の構成式で (du/dy) の2乗に比例する領域で

$$g \sin\theta (h-y)\{\rho(1-C)+\sigma C\} = \Gamma C \lambda \sigma D^2 \tan\theta^* (du/dy)^2, \qquad \Gamma = \frac{\alpha}{6}K^2,\quad \alpha: 比例定数 \tag{5}$$

ここに $\sin\theta$：斜面のこう配，h：流れの流動深，C：粒子の容積濃度，である．この流れの速度こう配は，境界面より βD のところで，$u = u_1$ という条件で求めると，

$$\frac{u}{u_*} = \frac{2}{3}(\Gamma \cdot \tan\theta^*)^{-1/2} \psi^{1/2} \left\{\left(1-\frac{\beta D}{h}\right)^{3/2} - \left(1-\frac{y}{h}\right)^{3/2}\right\} + \frac{u_1}{u_*}, \qquad \psi = \frac{\rho(1-C)+\sigma C}{C\sigma\lambda} \tag{6}$$

となる．粒子流のときは境界面が明瞭でないが，境界面付近の流速は小さいので，βD で $u=0$ として平均流速を表わすと，平均流速 u_m および抵抗係数 f は次のように表せる．

$$\frac{u_m}{u_* \psi^{1/2}} = \frac{2}{5}(\Gamma \tan\theta^*)^{-1/2}\left(\frac{h}{D}\right) \tag{7}$$

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = \psi^{1/2}\, \frac{2}{5}(\Gamma \cdot \tan\theta^*)^{-1/2}\left(\frac{h}{D}\right) \tag{8}$$

斜面上の砂れきを用いた実験では，(8)式がほゞ一つの相関式で表され，$\frac{2}{5}(\Gamma \cdot \tan\theta^*)^{-1/2} \fallingdotseq 1.0$ の値を得た．

iii) 斜面上の流れの法線応力効果，　斜面上の粒子流が，流動するにつれてその流動厚さを増す現象は，(1)式の右辺第2項の影響と考えることにする．さきに著者は，(1)式を $p_{xx} = -p + 2\eta_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \mu_c\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$，および

$p_{zz} = -p + 2\eta_0 \frac{\partial u}{\partial y} + \mu_c\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ と表わして，これを開水路流れに適用して，その影響を論じた。ここに用いた μ_c ははずしもその性格が不明のまま論じたが，(1)式の結果によると，つぎのように表される。

$$\mu_c = (Te/200)\lambda\sigma D^2 \qquad (9)$$

この項が存在するときは，開水路流れの運動方程式は，

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_m A) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_m U_m^2 A) = -\frac{\tau_0 S}{\rho} + gA\sin\theta - gA\frac{\partial h}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial}{\partial x}\int_A \frac{\mu_c}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dA \qquad (10)$$

となり，その影響をとり入れることができる。A：流積，τ_0：壁面せん断力，g：重力加速度である。

3. 粒子の回転

このよう流れにおける固体粒子の回転を最っとも簡単化した場合について考察してみよう。ここで対象とする粒子はある大きさをもっているため，微小要素が常に平均として表わすことができないと考えられる。もし微小要素内が均質でないとすると，作用する力に分布のあることを考える必要があり，もし分布があるとすると，そのために生ずるモーメントを考慮する必要がある。この粒子の運動について，運動方程式をみたしているとする。質量力を考えないときの運動方程式および回転角速度は，次のように表現される。

$$\partial\sigma_{ij}/\partial x_i = \rho\dot{u}_i \quad (11) \qquad \partial m_{ij}/\partial x_i - e_{ijk}\tau_{ij} = \rho\dot{\omega}_p \quad (12)$$

ここに m：モーメント，ω：角速度ベクトルである。微小面素 ΔS に作用する平均せん断力および平均モーメントは，つぎのように表せる

$$\int_\Delta t_{ij}\,dS_j = \tau_{ij}\Delta S_j \quad (13) \qquad e_{ijk}\int_\Delta t_{il}\cdot\xi_k\,dS_l = \bar{m}_{jk}\Delta S_i \quad (14)$$

ξ_k：粒子の質量の重心からの位置ベクトルである。この運動方程式はつぎのように書直される。

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) - 2\tau\left\{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) - e_{ijk}\omega_k\right\} \qquad (15)$$

$$m_{ij} = \alpha\frac{\partial\omega^k}{\partial x_k}\delta_{ij} + 2\beta\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x_i}\right)^S + 2\gamma\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}\right)^A \qquad (16)$$

ここに，p は静水圧，η，τ，β，γ は定数とする。(15)式および(16)式を $u_x = u(y)$，$u_y = u_z = 0$，$\omega_y = \omega(y)$，$\omega_x = \omega_z = 0$ の条件でかき直すと，

$$(\mu+\tau)\frac{d^2u}{dy^2} + 2\tau\frac{d\omega}{dy} = 0 \quad (17) \qquad 4\tau\omega + 2\tau\frac{du}{dy} - (\beta+\alpha)\frac{d^2\omega}{dy^2} = 0 \quad (18)$$

となる。この解は，

$$u = K_1 + K_2\cosh\frac{Ny}{l} + K_3\sinh\frac{Ny}{l} \qquad \omega = K_4 - 2K_1 y - 2NlK_2\frac{Ny}{l} \qquad (19)$$

$K_1 \sim K_2$：積分定数

ここに $l = \frac{\beta+\gamma}{4\mu}$，$N^2 = \frac{\tau}{\tau+\mu}$ である。適当な条件を入れることによって ω を確定することができる。ただこの解析では，これをもとにして粒径の篩分けを論ずることはむつかしく，今後の課題といえる。

1) 金谷：粒状体の流動：流体工学 Vol 14 No 12 1978 pp 641-648

2) 大同，加藤．；流体を含む粒子流の流動機構に関する研究，土木学会第34回年次学術講演会概要，昭54

3) 大同，粒子流の流動式，土木学会関西支部学術講演会概要，昭54

4) Ariman. T and A.S. Cakmak. Couple stresses in fluids, Physics. of Fluid, vol. 10, No 11. pp 2497-2499