

日本大学工学部 正員 木村喜代治

一様な条件のもとに存在する河川の蛇行は滑らかで規則的な形状をなしている。この蛇行形状に関する理論のうち Langbein と Leopold¹⁾ によるものが Hydrostatic catenary, *Elastica*²⁾ などの形状と全く相似であり、また単振子の運動と相似であることを述べる。

Langbein と Leopold は、河川の蛇行は流速、水深、水路幅、河床抵抗、水路勾配などが相互に影響し、これらの因子は流量および流量に順応するよう調節しつつ安定に何らかの結果であると考へた。そしてある流域の場合における二点の間には種々な経路があり得るが、蛇行の平面形状はすべての取り得る経路のうちで最も起こり得る経路を占めると考へた。そしてその経路は von Schelling³⁾ による平板上に確率的に運動する粒子の軌跡としての最頻経路のうちの一種であるとした。その結果下記式を示した

$$\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - 2 \cos \theta = 2\alpha \quad (1)$$

s : 曲線の長さ, σ : ds に対する偏角 $d\theta$ の標準偏差, θ : 曲線の切線と x 軸とのなす角, α : 積分定数で $\alpha = \cos \omega$ 。よって

$$s = \frac{1}{\sigma} \int \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \omega)}} \quad (2)$$

Langbein と Leopold はこれを近似化し *sine generated curve* と名付け、米国の諸河川や Friedkin の実験などについて検討し、式と実際とがよく一致していることを示している。

一方、水路底の横断面において張力のみ作用するときの水路断面形状は Hydrostatic catenary である。形状は

$$x = - \int_a^y \frac{(y^2 - b^2) dy}{\sqrt{(a^2 - b^2)^2 - (y^2 - b^2)^2}}$$

を解くことにより示されている⁴⁾。いま Fig. 2 のように考え、力の平衡より $A = f(\theta)$ として表わすと

$$\frac{T}{2w} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - \cos \theta + \cos \omega = 0 \quad (3)$$

T : 単位幅に作用する張力, w : 水の単位重量。よって A につき解き、式(2)と比較すると $1/\sigma$ が $\sqrt{T/w}$ に相当することがわかる。

さらに、直線でない細い棒^{弾性}の両端に一定の平衡せる力が作用したとき、または一定の平衡せる力と偶力の作用したときに形造る棒の曲線は *Elastica* と言われている。両端に力のみ作用している場合は

$$\left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \frac{2P}{EI} (\cos \theta - \cos \omega) \quad (4)$$

P : 力, E : 弾性係数, I : 断面二次モーメント。この式と式(2)とを比べると $1/\sigma$ が $\sqrt{EI/P}$ に置き換えただけであることがわかる。

また *Elastica* の式が単振子の運動式に相似であることはよく知られており、単振子の運動式は

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \omega) \quad (5)$$

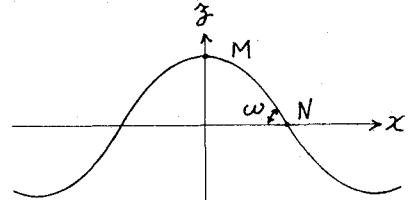


Fig. 1

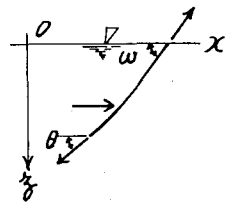


Fig. 2

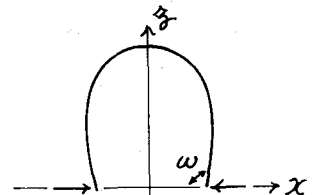


Fig. 3

t : 時間, l : 振子の長さ, g : 重力の加速度。この式と式(2)とは全く同型であることがわかる。

Fig. 1 で $\alpha=0$ を M 点とすれば, 式(2) は $C'/s = \mu$ とすると $\alpha = \mu F(\varphi, k)$ (6)
 F : 第一種の不完全積分, $\sin(\omega/2) = k$, $\sin(\theta/2) = k \sin \varphi$ 。

このように Langbein と Leopold による
 河川の蛇行形状を示す平面曲線は Hydrostatic
 catenary, Elastica などの形状と全く
 相似であり, また単振子と運動学上相似がある
 ことがわかる。

Hydrostatic curve の種々の曲線 (Fig. 4) のうち, 河川蛇行に関係あると思われ
 る $x = f(\phi)$ は次の通りである

$$x = a \sqrt{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \{ 2E(\phi, k) - F(\phi, k) \} \quad (7)$$

ただし $k = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$, $\frac{\phi}{a} = \cos \phi$ 。

また $a^2 - b^2 > 0$ のときは下記式で表
 よい

$$x = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}} \{ 2E(\phi, k) - F(\phi, k) \} \quad (8)$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2(1-b^2/a^2)}}, \quad \frac{\phi}{a} = \cos \phi$$

蛇行の限界として 8 字形の曲線では $\omega = 130.68^\circ$ である。

Fig. 6 のように同じ曲線が続くときの蛇行の限界では $b/a = 0.562$,
 $\omega = 117.54^\circ$, $l/a = 0.3760$ となる。このとき C, D 点で
 は曲線が接することになる。

蛇行曲線の l/a と ω との関係を求めると Fig. 7 の
 ようになる。

参考文献

1. W. B. Langbein and L. B. Leopold: River meanders $\frac{l}{a}$
 — Theory of minimum variance, U. S. Geological
 Survey, 1966.
2. A. E. H. Love: A treatise on the mathematical
 Theory of elasticity, Cambridge, 1934.
3. H. von Schelling: Most frequent particle
 path in a plane, Trans. A. G. U., 1951.
4. 3. については 林泰造: 河川蛇行論, 1970 年度水工学硯修講義集にくわしい講述がある。
 4. 木村喜代治: Hydrostatic curve の計算について, 第 17 回土木学会年次講演会概要集, 1962.

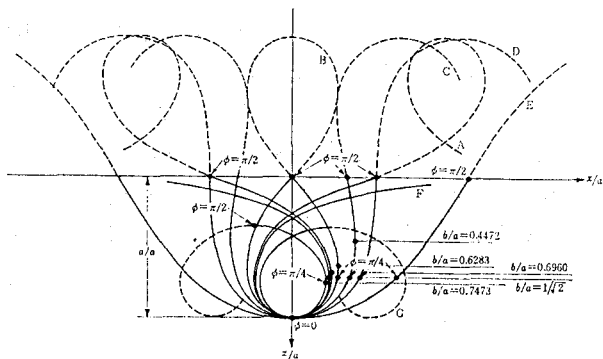


Fig. 4

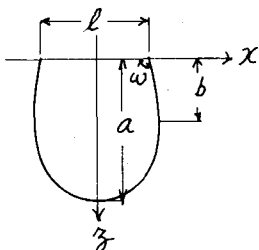


Fig. 5

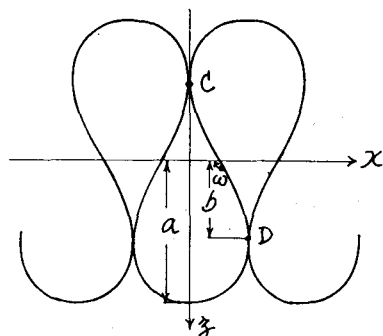


Fig. 6

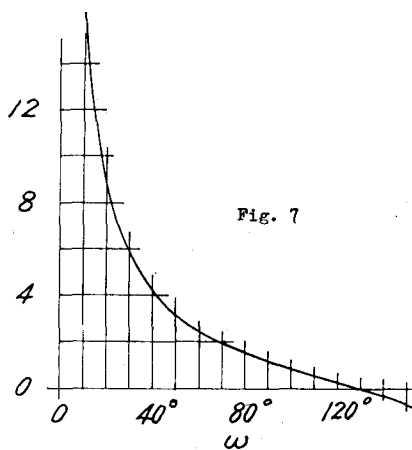


Fig. 7