

II-27 有限要素法による表面流出解析

中央大学理工学部 正員 川原 睦人
○ 中央大学大学院 学生員 横山 輝行

1. はじめに

本報告は、表面流出に対して有限要素法を適用する方法を考察したものである。一般に、表面流出は水深が小さく、流速は大きい流況を生じる。このような流れの過程を知る上で有限要素解析は有効な方法である。ここでは、二次元の浅水長波方程式に対し有限要素を適用する場合、空間変数に三節点三角形有限要素を使い、時間積分には二段階ラックス・ウェンドロフスキームの陽解法を用いる方法を検討する。

2. 基礎方程式

二次元の流れの場にデカルト座標系を考える (Fig. 1)。表面流出を記述する基礎方程式は、次式のように表わされる。

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} + (u_j M_i)_{,j} - A_e (M_{i,j} + M_{j,i})_{,j} + \frac{1}{2} g \cos \theta \cos \phi R^2_{,i} = g R \theta_{,i} - f u_i \sqrt{(u_R u_R)} + \hat{g}_i \quad (1)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + M_{i,i} = I \cos \theta \cos \phi \quad (2)$$

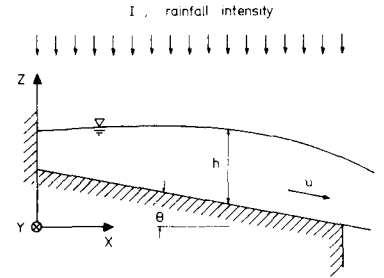


Fig. 1. Coordinate system

$$\left. \begin{aligned} M_i &= u_i R, \quad \theta_1 = \sin \theta, \quad \theta_2 = \sin \phi \\ \hat{g}_1 &= \frac{1}{2} V I \sin 2\theta \cos \phi, \quad \hat{g}_2 = \frac{1}{2} V I \cos \theta \sin 2\phi \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに、 u_i : 平均流速, R : 水深, g : 重力加速度, A_e : 渦動粘性係数, f : 摩擦係数, I : 降雨強度, V : 降雨の最終速度, θ, ϕ : x, y 方向の流域勾配である。また、1) 雨粒の衝突による圧力は零、2) 流域勾配 θ, ϕ は相应に小さい値、とする。

3. 境界条件及び初期条件

境界条件は、以下のようにする。

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \hat{u}_i \quad \text{on } S_1, \quad R = \hat{R} \quad \text{on } S_2 \\ t_i &= \left\{ -\frac{1}{2} g \cos \theta \cos \phi R^2 \delta_{ij} + A_e (M_{i,j} + M_{j,i}) \right\} n_j = \hat{t}_i \quad \text{on } S_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

また、初期条件としては、流速、水深ともに解析領域内のすべての点で既知であるとする。

$$u_i = \hat{u}_i^0, \quad R = \hat{R}^0 \quad \text{at } t=0 \quad (5)$$

4. 有限要素法

4-1 重みつき変分方程式 式(1), (2)に、それぞれ重み関数 M_i^* , R^* を掛け、有限要素の全域について積分すると次式のような重みつき変分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_V (M_i^* \frac{\partial M_i}{\partial t}) dV + \int_V \{ M_i^* (u_j M_i)_{,j} \} dV - \int_V (M_{i,i}^* R^2 \frac{1}{2} g \cos \theta \cos \phi) dV + \int_V A_e (M_{i,j}^* M_{i,j}) dV + \int_V A_e (M_{j,i}^* M_{j,i}) dV \\ - \int_V (M_i^* g R \theta_{,i}) dV + \int_V \{ M_i^* f u_i \sqrt{(u_R u_R)} \} dV = \int_{S_3} (M_i^* \hat{t}_i) dS + \int_V (M_i^* \hat{g}_i) dV \end{aligned} \quad (6)$$

$$\int_V (R^* \frac{\partial R}{\partial t}) dV + \int_V (R^* M_{i,i}) dV - \int_V (R^* I \cos \theta \cos \phi) dV = 0 \quad (7)$$

4-2 有限要素方程式 流速と水深に対する試験関数と重み関数を、各有限要素において次式のように内挿補間する。

$$\left. \begin{aligned} M_i &= \bar{\alpha}_i M_{ai}, & R_i &= \bar{\alpha}_i R_a, & U_i &= \bar{\alpha}_i U_{ai} \\ M_i^* &= \bar{\alpha}_i M_{ai}^*, & R_i^* &= \bar{\alpha}_i R_a^* \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで、 $\bar{\alpha}_i$ は内挿関数、 $M_{ai}, M_{ai}^*, R_a, R_a^*, U_{ai}$ はそれぞれ各有限要素における節点値である。式(8)を式(6), (7)に代入し解析領域全体で重ね合わせると、次式の有限要素方程式が得られる。

$$A_{\alpha\beta} \dot{M}_\beta + K_{\alpha\beta} U_\beta M_r + H_{\alpha\beta} R_\beta R_r + S_{\alpha\beta} M_\beta + C_{\alpha\beta} M_\beta = \hat{F}_\alpha \quad (9)$$

$$A_{\alpha\beta} \dot{R}_\beta + B_{\alpha\beta} M_\beta = \hat{Q}_\alpha \quad (10)$$

5. 時間積分法

本解析の場合は、時刻ごとの降雨変化による流出の応答を追跡するため、逐次時間積分法が必要となる。そこで、次式の二段階ラックス・ウェンドロフスキームを考える。

$$f(t+\Delta t/2) = f(t) + (\Delta t/2) \dot{f}(t) \quad (11)$$

$$f(t+\Delta t) = f(t) + \Delta t \dot{f}(t+\Delta t/2) \quad (12)$$

式(9), (10)に式(11), (12)のアルゴリズムを適用すると、

$$\begin{aligned} \text{一段階;} & \quad [\bar{A}_{\alpha\beta} + (\Delta t/2) \bar{C}_{\alpha\beta}] M_\beta^{n+1/2} = A_{\alpha\beta} M_\beta^n \\ & \quad + (\Delta t/2) (\hat{F}_\alpha - K_{\alpha\beta} U_\beta M_r^n - H_{\alpha\beta} R_\beta^n R_r^n - S_{\alpha\beta} M_\beta^n) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\bar{A}_{\alpha\beta} R_\beta^{n+1/2} = A_{\alpha\beta} R_\beta^n + (\Delta t/2) (\hat{Q}_\alpha - B_{\alpha\beta} M_\beta^n) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{二段階;} & \quad [\bar{A}_{\alpha\beta} + \Delta t \bar{C}_{\alpha\beta}] M_\beta^{n+1} = A_{\alpha\beta} M_\beta^{n+1/2} \\ & \quad + \Delta t (\hat{F}_\alpha - K_{\alpha\beta} U_\beta M_r^{n+1/2} - H_{\alpha\beta} R_\beta^{n+1/2} R_r^{n+1/2} - S_{\alpha\beta} M_\beta^{n+1/2}) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\bar{A}_{\alpha\beta} R_\beta^{n+1} = A_{\alpha\beta} R_\beta^{n+1/2} + \Delta t (\hat{Q}_\alpha - B_{\alpha\beta} M_\beta^{n+1/2}) \quad (16)$$

ここに、 $\bar{A}_{\alpha\beta}, \bar{C}_{\alpha\beta}$ は対角化された質量行列である。

6. 数値計算例

一次元表面流の計算結果を示す。Fig. 2は解析領域の有限要素分割図である。境界A-C、B-Dでは法線方向流速を零とし、境界A-Bでは、流速成分すべて零とする。

Fig. 3は、計算結果と実験値を比較した流出量図である。ここでの計算データは、渦動粘性係数: $1 \text{ m}^2/\text{min}$ 、流域勾配: 0.0465 ラジアン、降雨強度: 27.0 mm/hr 、降雨継続時間: 4 分 、摩擦係数: 0.0125 (降雨時)、 0.075 (降雨後)である。またFig. 4は、節点GとHから一定流入量がある場合の結果である。Fig. 5は、水深と流速の時間変化図である。Fig. 6は、E-Fに沿った水深と流速の水平分布図である。

7. おわりに

表面流出問題に有限要素法を適用した数値実験を紹介した。数値計算例からも明らかのように、摩擦係数(す)は流れの過程に強い影響を与えるものである。これはまた、計算の安定の重要な要因ともなっている。

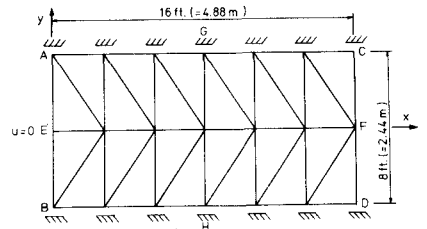


Fig. 2. Finite element idealization

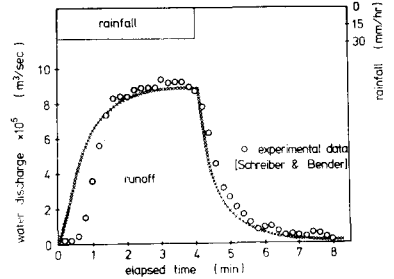


Fig. 3. Computed hydrograph

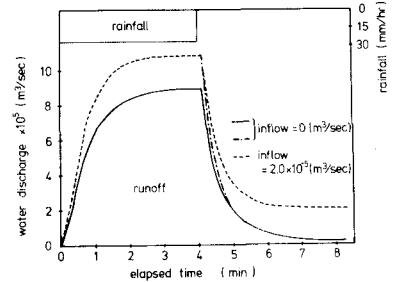


Fig. 4. Computed hydrograph with inflow discharge

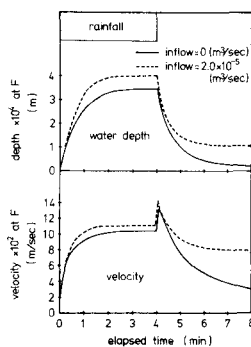


Fig. 5. Computed water depth and velocity

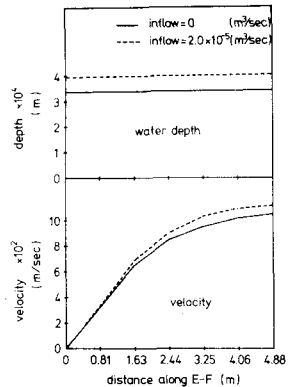


Fig. 6. Horizontal distribution of water depth and velocity