

京都大学工学部	正員	椎葉元晴
京都大学工学部	正員	高柳琢馬
運輸省港湾技研	正員	森川雅行

1. はじめに

従来の洪水予報は、1つのハイドログラフに対して1つのハイドログラフまたは数個のハイドログラフに対してそれぞれに応じた数個のハイドログラフというように決定論的に議論されてきた。本来、洪水予報は予測された洪水に対して、あらかじめ定められた行動(ダムへの準備放流、危険地区の住民の避難等)をするべく行われるものであるから、誤った予報は誤った行動を引き起こし、経済的・人的損失を招いたり、場合によっては人命を失うこともありうる。こうした事情を考えると、洪水予報においては予測値だけでなく、予報の精度も問題となる。

一般に、流出現象を忠実に表現するモデルを構成することは不可能であり、何らかの現象の簡略化・理想化を避けることができない。こうして構成されたモデルに誤差を含んでおり、このモデル誤差を償うものとして確率的な外乱を付与することが考えられる。さらに、システムを観測する際に確率的な誤差が入りこくことを避けることはできない。

本研究は、このような動的なシステムにフィルタリング理論を適用することにより、確率的な洪水予報モデル構成の基本的な枠組を提供しようとするものである。

2. 気象システム・流出システムのシステム方程式

実際の気象の諸量が離散時間で観測されることを考慮して、本研究では、次のような型のシステム方程式で、気象システムが表現されるものとする。

$$\dot{x}_{k+1} = \varphi(x_k, t_k) + \Gamma(t_k)w_{k+1}, \quad y_k = f(x_k, t_k) + u_k, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

ここに、 x_k は時刻 t_k における気象システムの状態ベクトル、 y_k は時刻 t_k から t_{k+1} までの降雨強度、 φ 、 f は一般に非線形の関数、 $\Gamma(t_k)$ は非確率行列、 w_{k+1} 、 u_k は白色正規雑音である。

また、流出システムは、次のような型のシステム方程式で表現されるものとする。

$$dx_t/dt = f(x_t, t) + b y_k + G w_t, \quad y_k = g(x_{t_k}, t_k) + v_k, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k=0, 1, \dots \quad (2)$$

ここに、 x_t は時刻 t における流出システムの状態ベクトル、 y_k は時刻 t_k の流出流量、 f 、 g は一般に非線形の関数、 b 、 G は非確率行列、 v_k は白色正規雑音、 w_t は連続白色正規雑音である。

3. フィルタリング・予測理論の適用

時々刻々観測される情報をもとにして、現在時刻の流出システムの状態 x_t を推定し、さらに将来の降雨・流出流量を予測する手順を図1に示す。ただし、 y_k 、 y_k 、 x_k は観測されるものとする。

フィルタリングの場合は、仮定により y_k は既知としてよいから、(2)式のみを使って流出システムの状態推定・および推定誤差の共分散行列を求めることになる。(2)式は一般に非線形で、厳密な非線形フィルタは無いが、準線形化による反復線形フィルタスモothing (iterated linear filter smoother)¹⁾が適用できる。

予測の場合は、離散時間の状態量と連続時間の状態量が混在することになるから、以下のように取扱う。

まず、新たに状態ベクトル $AT = [S^T, x^T]$ (T は転置を表す)を導入し、状態方程式を、

1) 時刻 $t_k < t < t_{k+1}$ においては、連続時間で、

$$\frac{dA}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x, t) + b y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} w_t \quad (3)$$

2) 時刻 t_{k+1} においては、離散時間

$$A_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(x_k, t_k) \\ x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \omega_k \quad (4)$$

と考える。

1) の場合、 $dx(t) = f(x(t))dt + Pdu + Gdp_t$ ($u \sim N(0, Q)$), P_t は Brown 運動過程で $\{dP_t dP_s^T\} = R\delta(t-s)$ の形をしている。この場合、準線形化により、平均値 $\bar{x}(t)$ 、共分散行列 $P(t)$ は近似的に次式、

$$\begin{aligned} d\bar{x}(t)/dt &= f(\bar{x}(t)), \quad P(t) = \Phi(t, t_0)P(t_0)\Phi^T(t, t_0) \\ &+ \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) dP dP^T \Phi^T(t, \tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) G R G^T \Phi^T(t, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

を満たす。ただし、 $\Phi(t, \tau)$ は $\bar{x}(t)$ の回りに準線形化した方程式の推移行列である。2) の場合、 $x(k+1) = f(x(k)) + \omega_k$ ($\omega_k \sim N(0, Q_k)$) の形をしている。この場合、Taylor 展開の 2 次項までとり、 x_k が正規分布をしていると仮定すると、平均値 $\bar{x}(k+1)$ 、共分散行列 $P(k+1)$ は、

$$\begin{aligned} \bar{x}_i(k+1) &= f_i(\bar{x}(k)) + \frac{1}{2} \sum_{j,l} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_l} P_{jl}(k), \quad P_{ij}(k+1) = \sum_{m_1, m_2} \frac{\partial f_i}{\partial x_{m_1}} \frac{\partial f_j}{\partial x_{m_2}} P_{m_1 m_2}(k) \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_{m_1} \partial x_{m_2}} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_{m_3} \partial x_{m_4}} (P_{m_1 m_3}(k) P_{m_2 m_4}(k) + P_{m_1 m_4}(k) P_{m_2 m_3}(k)) + Q \end{aligned} \quad (6)$$

により求めることが出来る。

4. 数値シミュレーションによる理論の検証

本研究では、仮想の気象システムモデルによって降雨を擬似発生させ、その降雨データに基づく流出量について各時点でのフィルタリング・予測を行ないその精度を検討する。この数値シミュレーションに用いたシステムモデルは簡単な式 (1), (2) を 1 次元として、次のようになる。

1) 気象システム — 仮想の式である。

$$S_{k+1} = S_k + C_1 \exp\{-C_2(S_k - 1)^2\} + C_3 + C_4 \omega_{k+1}, \quad r_k = h(S_k) + C_5 u_k$$

2) 流出システム — 貯留関数法による。

$$\begin{aligned} dx_k/dt &= D_1 r_k - g(x_k) + D_2 u_k, \quad y_k = g(x_{k-T_0}) + D_3 u_k \\ \text{二次元, } h(S) &= \begin{cases} 0 & (S \leq 0.522) \\ C_6 S(S-2)^2 & (0.522 < S \leq 2) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} D_2 x^3 & (x \geq 0) \\ -D_2(-x)^3 & (x < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

$C_1, \dots, C_6$ は非負定数, $D_1, \dots, D_3$ は定数である。

このようなシステムモデルを数値シミュレーションを行ない、得ら

れた流量予測結果の 1 例を図 B に示す。図 B は、シミュレートされたハイドログラフと、時点 $k=10, 15, 20, 25$ からそれぞれ 10 時間後まで毎時予測した流量を示したものである。図 C は、各時点における 1 時間後の流量予測値と真値との差およびその標準偏差を示したものである。これらの図に示される結果は良好であって、非線形性の影響は多少述べた理論で許れることが示された。また、データの蓄積による予測精度の向上効果や、各システム方程式の誤差項の大小による予測精度の変化、遅滞時間の影響などについて理論と一致するシミュレーション結果が得られた。紙数の都合により詳細は講演時に述べることにする。

本研究では、システム方程式の定数、誤差の統計的性質については既知として議論した。この点について、現在検討中である。

参考文献 1) Jazwinski, A.H.: Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press (1970)

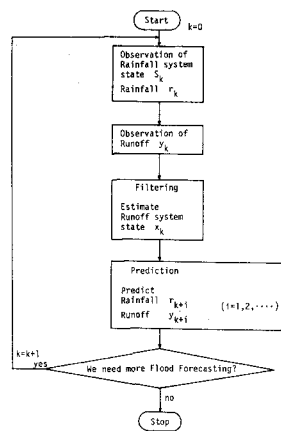


図 A

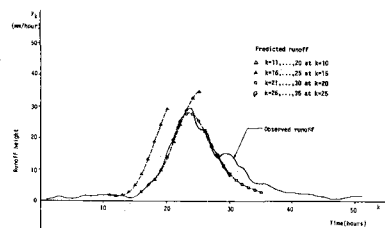


図 B

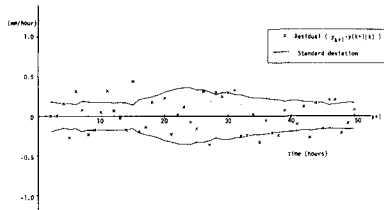


図 C