II-20　合理式の安全率

東京都立大学工学部　○正員　新井邦夫
〃　〃　丸井信雄

はじめに

初めて提案されて以来100年近くになる合理式は、その信頼性について多大な疑問が投げかけられてきたにもかかわらず、今日なお広く用いられている。その理由は確かに計算の簡便さにもあろうが、流達時間という巧妙な概念の導入による平均雨量とピーク流量との線型関係仮定が、少くとも第1近似として首認されるからであろう。

一方実際の設計者の立場からこの合理式をみると、モデルがあまりにも単純すぎるために、計算結果に十分な信頼を寄せることができず、流出率に安全率的な要素を加味して、それをまるめて大きくしたくなる。

今日までの、学問、技術等あらゆる経験に基づいてestimateされるこの流出率の値を決して否定するわけではないが、結果としてのピーク流量には、構成要素の不確実さによる誤差が当然あるわけだから、本来の流出率と安全率とを明確に区別しておくことは、言辞上の意味だけからばかりでなく、理論的にも、合理式をより合理的にするに違いない。

本報告は合理式に付加すべき安全率を、確率論に基づいて誘導したものである。

理論および考察

単位面積当りのピーク流量をQとすれば、合理式は次のように与えられる。

$$Q = C\cdot I \qquad (1)$$

ここにCは流出率、Iは流達時間内の平均降雨強度である。したがってピーク流量の平均は次のようになる。

$$E[Q] = E[C\cdot I] = E[C]\cdot E[I] + \rho\sqrt{V[C]\cdot V[I]}$$
$$= E[C]\cdot E[I]\{1+\rho\mu_C\mu_I\} \qquad (2)$$

ここにEは平均、Vは分散、μは変動係数を意味し、ρはCとIとの相関係数である。

降雨強度曲線は一般に単調減少関数であるから、流達時間の分布を仮定しない限り、Iの平均や分散を求めることはできない。

降雨強度曲線を(3)式であらわせば、Iの密度関数は流達時間Tの密度関数によって(4)式のように誘導される。

$$I = g(T) \qquad (3)$$

$$f_I(i) = dF_I(i)/di = d(1-F_T(t))/di$$
$$= d(1-F_T(g^{-1}(i)))$$
$$= -(dg^{-1}(i)/di)\cdot f_T(g^{-1}(i)) \qquad (4)$$

ここにFは分布関数を意味する。

今、降雨強度曲線を(3)′式、Tの密度関数をガンマ分布((5)式)と仮定すれば、Iの密度関数は(6)式となる。

$$I = a/T \qquad (3)'$$

$$f_T(t) = \lambda^k t^{k-1}\cdot\exp[-\lambda t]/\Gamma(k) \qquad (5)$$

$$f_I(i) = (a\lambda/i)^{k+1}\cdot\exp[-\lambda a/i]/\Gamma(k)\lambda a \qquad (6)$$

(6)式の平均、および分散は

$$\left.\begin{aligned} E[I] &= \lambda a/(k-1) \\ V[I] &= \lambda^2 a^2/(k-1)^2(k-2) \end{aligned}\right\}(7)$$

となり、さらに(5)式より

$$\left.\begin{aligned} k &= 1/\mu_T^2 \\ \lambda &= 1/\mu_T^2\cdot E[T] \end{aligned}\right\}(8)$$

が得られるから、結局、Iの平均、変動係数はTのそれらによって次のようにあらわされる。

$$\left.\begin{aligned} E[I] &= a/E[T](1-\mu_T^2) \\ \mu_I &= \mu_T/\sqrt{1-2\mu_T^2} \end{aligned}\right\}(9)$$

(2)式に(9)式の関係を代入すると、

$$E[Q] = a\cdot E[C]/E[T]$$
$$\times\{(1+\rho\mu_C\mu_T/\sqrt{1-2\mu_T^2})/(1-\mu_T^2)\} \qquad (2)'$$

となる。

なお、(7)式および(8)式から、明らかなように $0 \leqq \mu_T^2 < 1/2$ なる条件があることに注意すべきである。

ここで問題となるのはρである。常識的には流出率と降雨強度との間に正の相関があると考えたい。なぜなら、それによってQとIとの間に非線型関係を考慮したことになるからである。しかしながら、実際にその確証を得ることは難かしい。

図は資料（建設省土木研究所：都内谷端川・桃園川排水区水文観測資料および建設省中部地建：庄内川流出試験地水文資料）を用い、別に既存の方法で算出した流達時間内の平均降雨強度とピーク流出率の関係を示したものである。流域面積がやや大きすぎること、強い降雨が少ないこと等の難点はあるが、いずれの河川についても、少なくとも顕著な正の相関があるとは言いにくい。

又理論的にも次に示す分散を求める関係上 $\rho=0$ とせざるを得ない。

C と I が無相関であれば、Q の分散は次のようになる。

$$V[Q]=V[C]\cdot V[I]+E^2[C]\cdot V[I]+E^2[I]\cdot V[C]$$
$$=E^2[C]\cdot E^2[I](\mu_I^2\mu_c^2+\mu_c^2+\mu_I^2) \qquad (10)$$

したがってQの変動係数は、

$$\mu_Q=\sqrt{(\mu_c^2+\mu_T^2-\mu_T^2\mu_c^2)/(1-2\mu_T^2)} \qquad (11)$$

となる。

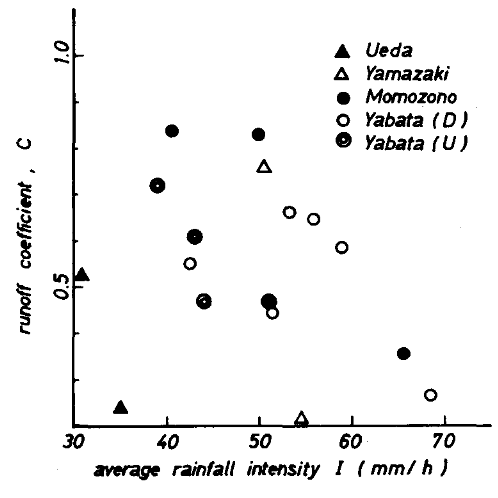
さて安全率（S・f）を既存の決定論的方法による計算流量に対する、計画流量の比と定義すれば、前者は (2)' 式の右辺を $\mu_T=0, \mu_c=0, \rho=0$ としたものであり、後者は、設計者がこれから求めようとするものである。

したがって安全率は、

$$sf=(E[Q]+\beta\sqrt{V[Q]})/aE[C]/E[T]$$
$$=(1+\beta\mu_Q)/(1-\mu_T^2) \qquad (12)$$

と表わせる。(12)式の分子は区間推定の上限値に他ならないから、β とパーセント点との対応がチェビシェフの不等式（(13)式）によって可能となる。

$$P[\{E[Q](1-\beta\mu_Q)\}\leq Q\leq\{E[Q](1+\beta\mu_Q)\}]\geq 1-\frac{1}{\beta^2} \qquad (13)$$



ピーク流出率と流達時間内の平均降雨強度との関係

例を示そう。$\mu_T=1/6$, $\mu_c=1/5$ と推定し、Qの分布関数において 55% に対応する流量を計画流量にしたいと思った時、(14)式の右辺＝0.1より、$\beta=0.949$, (11)式に μ_T と μ_c の値を代入することにより、$\mu=0.193$, したがって、(13)式より安全率として 1.22 を得る。

なおQの分布は特に必要ではないが、Cに対してもガンマ分布（(14)式）を仮定すれば、Qの密度関数は(15)式となる。

$$f_C(c)=\lambda'^{k'}c^{k'-1}\exp(-\lambda' c)/\Gamma(k') \qquad (14)$$
$$f_Q(q)=\int_0^\infty (1/c)f_I(q/c)\cdot f_C(c)\,dc$$
$$=\frac{\Gamma(k+k')}{\Gamma(k)\cdot\Gamma(k')}\frac{\lambda'}{a\lambda}\left(1-\frac{\lambda'}{\frac{a\lambda}{q}+\lambda'}\right)^{k+1}\left(\frac{\lambda'}{\frac{a\lambda}{q}+\lambda'}\right)^{k'-1} \qquad (15)$$

蛇足ながら(15)式は、$\lambda'/\{(a\lambda/q)+\lambda'\}$ に関するベータ分布に他ならない。

結論

合理式の流出率から安全率を分離すること、そしてそれを(12)式で表現することを提案した。これらの式の誘導に際し、流達時間の分布をガンマ分布とし、又降雨強度曲線としてあまり一般的でない型を仮定した。前者については、待ち行列において到着間隔分布にアーラン分布があることを想起すれば、無理のない仮定であることが理解されよう。後者については、これ以上パラメータを多くすると解析的な困難さがあることと、誘導される安全率が極めて複雑となり、合理式の特徴である簡明さに必ずしも整合するものではないと思われたからである。実際、問題となる流達時間近傍で既存の曲線式に近似する a を採用すれば大きな誤差はない。

又 $\rho\neq0$ の場合の安全率を簡単に示す方法の確立が今後の課題として残った。

いずれにしても合理式に安全率の項を付加しておくことは、モデルの理論的な不合理を是正するばかりでなく、流出率、および流達時間の不確実性の程度の決定を、個々の流域の性状を吟味する設計者に委ねることになるから、実用上の利便さが増すことになろう。

参考文献

Lindgren, B.W. (1968)
Statistical Theory, Macmillan