II-5　貯水池で給水不足に至る期間長の確率的特性の推定

名古屋工業大学　正員　長尾正志
同　大学院　学生員　梶間津洋志

1. 貯水池利用による期間長の研究

1.1 研究の意義・目的　昨年来の北九州における深刻な水不足に際して痛感されたように，当初ある程度の貯水池貯水量の存在する間に，妥当な給水制限を実施し，渇水予想期間で甚大な水不足を招来しないように配慮しなければならない。その場合，水不足の量的な評価と同時に，時間的側面もまた重要である。ここでは後者の問題，とくに，初期貯水量およびある水使用計画の下で，何時水不足が始まるかといった期間長の問題を考察する。すなわち，現在の貯水量から出発して，水不足ないしその危険のある任意の貯水量に至る期間長の確率特性を，以後予想される流量特性，利水用貯水池容量，目標放流量の下に推定する手法を提示する。これには貯水量系列がマルコフ連鎖を構成することから確率行列としての表示，さらに電算による行列演算を利用する。

1.2 従来の研究動向　この種の問題は，*stochastic reservoir theory* のなかで，*first passage time to emptiness* などとして，*Prabhu*，*Gani* らによって研究され，最近では相関流量系列の議論もみられる。しかし，その際の表式化は非常に煩雑になり，実用化にはまだ遠いと考えられるので，ここでは独立流量系列の取り扱いができるとした場合の解析法を記述する。

2. 水不足および任意の貯水量低下に至る期間長の確率特性の推定

2.1 基礎仮定　つぎの記号および前提を用いる。X_n：期間 $(n, n+1)$ $(n=0,1,\cdots)$ の間の流入量，Z_n：時点 n の直前の貯水量，k，m：貯水池の有効貯水容量，目標放流量　放流規則を単位期間内でできるだけ貯留し期末に目標放流量をなるべく満足するように放流すれば，貯水量方程式は次式のようになる。

$Z_{n+1} = min(k, Z_n + X_n) - min(m, Z_n + X_n)$ (1)　流入量は，独立系列かつつぎの同一の離散分布　$Pr\{X_n = j\} = g_j$ $(j = 0, 1, \cdots)$ (2)　に従うとする。これより，貯水量 Z_n から Z_{n+1} への移行は，確率行列　$\mathbb{P} = (p_{ij}) = Pr\{Z_{n+1} = j \mid Z_n = i\}$ (3)　によるが，その i 行ベクトルは　$\mathbb{P}_i = (G_{m-i}, g_{m-i+1}, g_{m-i+2}, \cdots, g_{m-i+j}, \cdots, g_{k-i-1}, h_{k-i})$ (4)　である。ただし，$G_i = \sum_{j=0}^{i} g_j$，$h_i = \sum_{j=i}^{\infty} g_j$ $(i \geq 0)$ (5)，なお，i，j の存在範囲は，$0, 1, 2, \cdots, k-m$，また，当然 g_l，G_l において，添字 l が負のものはすべて零となる。

2.2 水不足に至る期間長の推定　1）期間長の分布　まず水不足に至る期間長を，初期貯水量 i から出発して，始めて貯水量が零になる期間と定義する。すなわち，非零の初期貯水量 $Z_0 = i$ の下で，つぎの最小期間長と定義したことになる。　$T_{i0} = min\{n \mid Z_n = 0 \cap Z_0 = i\}$ $(1 \leq i \leq k-m)$ (6)　この確率分布を $f_{i0}^{(n)}$ と記す。　$f_{i0}^{(n)} = Pr\{T_{i0} = n\} = Pr\{Z_r > 0\ (r = 0, 1, \cdots, n-1) \cap Z_n = 0 \mid Z_0 = i\}$ (7)
これらに行列演算を用いれば，$f_{i0}^{(n)}$ は次式のように表現される。　$f_{i0}^{(n)} = \gamma_i \Gamma^{n-2} \phi$ $(n \geq 2)$ (8)
$f_{i0}^{(1)} = p_{i0} = G_{m-i}$ (9)　ただし，Γ は，(3)式の $\mathbb{P}$ で $i = j = 0$ に対応した行と列を除外した行列で，ϕ は $(G_{m-1}, G_{m-2}, \cdots, G_0, 0, \cdots, 0)^t$（$\mathbb{A}^t$：$\mathbb{A}$ の転置行列）　また，γ_i は Γ の i 行に相当する行ベクトル，なお $\Gamma^0 = \mathbb{I}$（単位行列）である。したがって，$f_{i0}^{(n)}$ の時間的変化は Γ^{n-2} で特徴づけられる。

つぎに，T_{i0} の p.g.f. $F_{i0}(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f_{i0}^{(n)} z^n$ を逆行列を使って表現する。　$F_{i0}(z) = f_{i0}^{(1)} z + \sum_{n=2}^{\infty} f_{i0}^{(n)} z^n = G_{m-i} z + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_i \Gamma^{n-2} \phi z^n = G_{m-i} z + \gamma_i z^2 \sum_{m=0}^{\infty} (z\Gamma)^m \phi = G_{m-i} z + z^2 \gamma_i (\mathbb{I} - z\Gamma)^{-1} \phi$ (10)

ただし，$\mathbb{A}^{-1}$ は $\mathbb{A}$ の逆行列で，上記の p.g.f. は $max|zg_i| < 1$ となるように z および g_i を選べば收束する。また，この場合，貯水量過程のマルコフ連鎖 $\{Z_n\}$ は有限かつ既約であるから，確率 1 をもって有限な期間長 T_{i0} の存在することが知られている。

2) 期間長の平均　T_{i0} の平均は，P.g.f. の性質より，次式で計算できるはずである。 $E\{T_{i0}\}=[dF_{i0}(z)/dz]_{z=1}\equiv F_{i0}'(1)$ (11) ここで逆行列の微分演算が必要となる。これに $dA^{-1}/dz=-A^{-1}(dA/dz)\cdot A^{-1}$ を用いると， $F_{i0}'(z)=G_{m-i}+2z\gamma_i(\mathbb{I}-z\Gamma)^{-1}\phi+z^2\gamma_i(\mathbb{I}-z\Gamma)^{-1}\Gamma(\mathbb{I}-z\Gamma)^{-1}\phi$ (12) したがって，平均は次式で与えられる。 $E\{T_{i0}\}=G_{m-i}+2\gamma_i(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}\phi+\gamma_i(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}\Gamma(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}\phi$ (13)

3) 期間長の分散　上と同様に表記すると，期間長の分散はつぎの式から求められるはずである。

$V\{T_{i0}\}\equiv E\{T_{i0}^2\}-E^2\{T_{i0}\}=F''(1)+F'(1)-\{F'(1)\}^2$ (14) 先と同様に，まず $F_{i0}''(z)$ を求め，それに $z=1$ を代入すれば $F''(1)$ が求められ，したがって，分散は次式で計算できることが導かれる。

$$V\{T_{i0}\}=G_{m-i}(1-G_{m-i})+4(1-G_{m-i})\gamma_i(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}\Gamma(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}\phi+(5-2G_{m-i})\gamma_i(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}\Gamma(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}\phi$$
$$-[\gamma_i\{2(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}+(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}\Gamma(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}\}\phi]^2 \quad (15)$$

2.3 任意の貯水量低下に対する期間長の推定

上述の諸式は，任意の貯水量から出発して，当初の目標放流量が充足されなくなり，貯水量が完全に底をつくまでの期間長の考察であった。しかし，現実には，このような最悪の事態に到達する以前に，目標放流量を減少させ，すなわち給水制限を課して，貯水量の余裕をいくらかでも残すような操作を行なうべく努力するであろう。こうした点を考慮して，より一般的に，任意の初期貯水量 i から出発して，始めて任意の貯水量 j（普通には $j<i$）に到達する期間長 T_{ij} を考察対象としよう。一般的にいって，いまの場合の貯水量過程は有限なエルゴード的マルコフ連鎖であるから，当然既約で，T_{ij} の平均や分散は必ず存在する。これらを行列演算によって表現するが，数式的には有限マルコフ連鎖に対する既知の分野であるので，結果のみを定常分布の導出から記述する。

1) 定常分布　これを確率ベクトルで $\mathbf{u}=(u_0,u_1,\cdots,u_{k-m})$ と記すと，次式が成り立つ。$\mathbf{u}\mathbb{P}=\mathbf{u}$, $\sum_{i=0}^{k-m}u_i=1$ (16) この両式を満足する $\mathbf{u}$ を求めるには，$\mathbb{I}-\mathbb{P}$ で作られる行列の最後の列に1を代入した行列 $\mathbb{S}$，および $(k-m+1)$ 次の零ベクトル（行ベクトル）の最後の要素に1を代入したベクトル $\mathbf{m}$ を使って，つぎの式で計算すればよい。 $\mathbf{u}=\mathbf{m}\mathbb{S}^{-1}$ (17)

2) 期間長の平均と分散　まず，期間長の平均，分散の行列 $\mathbb{M},\mathbb{V}$ をそれぞれつぎのように定義する。

$\mathbb{M}\equiv(E\{T_{ij}\})$, $\mathbb{V}\equiv(E\{T_{ij}^2\}-E^2\{T_{ij}\})$ (18)，つぎに $\mathbb{W}=(E\{T_{ij}^2\})$ を使うと，$\mathbb{V}$ はつぎのように書き直せる。 $\mathbb{V}=\mathbb{W}-\mathbb{M}_{sq}$ （$\mathbb{M}_{sq}$：行列 $\mathbb{M}$ の各要素の平方を要素とする行列） (19) まず $\mathbb{M}$ は次式によって求められる。 $\mathbb{M}=(\mathbb{I}-\mathbb{Z}+\mathbb{J}\mathbb{Z}_{dg})\mathbb{D}$ (20) ただし $\mathbb{Z}=(\mathbb{I}-\mathbb{P}+\mathbb{U})^{-1}$，$\mathbb{U}=\mathbf{u}^t\equiv(u_0,u_1,\cdots,u_{k-m})^t$，また $\mathbb{J}$：要素がすべて1の $(k-m+1)$ 次の正方行列，$\mathbb{Z}_{dg}$：$\mathbb{Z}$ の対角線要素を要素とし他はすべて零の対角行列，$\mathbb{D}$：対角線要素 $d_{ii}=1/u_i$ $(i=0,1,\cdots,k-m)$ をもち他はすべて零の対角行列である。これらによって平均値行列 $\mathbb{M}$ が分かれば，それから分散行列 $\mathbb{V}$ が次式の行列 $\mathbb{W}$ から求められる。

$\mathbb{W}=\mathbb{M}(2\mathbb{Z}_{dg}\mathbb{D}-\mathbb{I})+2(\mathbb{Z}\mathbb{M}-\mathbb{J}(\mathbb{Z}\mathbb{M})_{dg})$ (21) ただし，$(\mathbb{Z}\mathbb{M})_{dg}$ は行列積 $\mathbb{Z}\mathbb{M}$ の対角線要素を要素とし他の要素はすべて零の対角行列である。

なお，こうした行列演算は，従来かなり煩雑なものと目されていたが，最近BASIC などの電算用サブ・プログラムとして，配列・行列の四則演算や逆行列，初期値設定などの機能が具備され，迅速・容易に遂行できる。

3. 適用例　右表は四国銅山川水系，柳瀬ダムの冬期（11月初～2月末）で，期間長 T_{i0} の平均と標準偏差を示す。流量分布は離散型の経験分布を採用している。

もちろん，これらの期間長の解析結果は，水不足への対応のみならず，たとえば迎洪水期での満水に至る期間長の確率的推定などに対しても応用できるものである。

MEAN & STANDARD DEVIATION OF FIRST PASSAGE TIME TO EMPTINESS FOR YANASE DAM

i	MEAN	i	MEAN	i	ST.DEV.	i	ST.DEV.
		9	5.9068			9	1.7524
1	1.1768	10	6.5154	1	0.6877	10	1.8348
2	1.4228	11	7.1364	2	0.9365	11	1.9068
3	2.2792	12	7.7474	3	1.0748	12	1.9749
4	2.7517	13	8.3613	4	1.2437	13	2.0346
5	3.4624	14	8.9687	5	1.3504	14	2.0883
6	4.0252	15	9.5727	6	1.4757	15	2.1334
7	4.6789	16	10.1650	7	1.5696	16	2.1682
8	5.2757	17	10.7348	8	1.6694	17	2.1903

TIME UNIT: 5 DAYS, VOLUME UNIT: $5m^3$/sec×DAY, k=20, m=3