II-4　対数ピアソン3型分布の積率法

北海道大学工学部　正員 ○ 星　清　正員 山岡 勲

1．概説　T一年確率水文量は治水計画における設計荷重ともいえようが、統計的推定である以上、その推定値の信頼度(分散)を知っておくことは重要である。T一年確率水文量とその信頼度は標本数 N、確率分布形、母数推定法、および推定母数の分散・共分散に依存する。U. S. A. Water Resources Council[1](WRC)は洪水頻度解析に対数ピアソン3型(LP3)分布形を推奨している。WRC法は対数標本値に積率法を適用する近似解である。　本報告では、LP3分布の厳密解、すなわち、原系列の3次までの積率を保存する母数推定法をのべ、両者によるT一年確率水文量、およびその信頼度を比較検討する。

2．対数ピアソン3型(LP3)分布形の特性　今、原系列標本値を x_i、その対数標本値を y_i とすると、LP3分布は文字通り y_i がピアソン3型(P3)分布に従がう。P3分布の密度関数は (1)式で与えられる。ここで、c、a、および b は分布母数で、Γ(b) はガンマ関数である。P3分布の平均値 (A_{vy})、変動係数 (C_{vy})、および歪度 (S_{ky})は (2)式に示される。一方、LP3分布の密度関数は (3)式となり、原点のまわりの r次の積率 μ'_{xr} は (4)式で与えられる。したがって、LP3分布の平均値 (A_v)、変動係数 (C_v)、および歪度 (S_k) は (5)式で与えられる。　LP3分布の変動係数と歪度は位置母数に依存しない。LP3分布の形状は母数 a の符号に依存する。すなわち、a が正の時、LP3分布は下限値exp(c) をもち、しかも、P3分布の歪度は正である。また、a が負の時には、LP3分布は上限値 exp(c) をもち、P3分布の歪度は負となる。一般に、水文量の対数標本値は負の歪度をとる場合が多いから、LP3分布を観測値にあてはめようとする時、推定母数 a は負となり、したがって、分布形は上限値をもつ確率が大となる。WRC法では、対数標本特性値を (2)式の左辺に代入して分布母数を積率法で推定する。この母数推定法では、原系列の3次までの積率が保存されない。　したがって、これから述べるLP3分布の厳密積率法とWRCの近似積率法ではT一年確率水文量とその信頼度算定に差異が生ずることは予想できる。　Bobée[3]は原点のまわりの3次までの標本積率を (4)式の左辺に用いて非線形方程式を解き母数推定を行なう手法を提案している。　しかしながら、推定母数の分散・共分散を算定していないのでT一年確率水文量の信頼度を提示できなかった。　ここでは、Bobéeの推定法と異なる手法を用いてLP3分布の母数推定とその分散・共分散を求める。　LP3分布の変動係数と歪度が位置母数 c に無関係であることに着目して、(5)式の第2式と第3式の非線形連立方程式をNewton―Raphson法によって母数 a,b について解くことを試みた。　この時、収束精度を 10^{-5}とした。　変動係数(C_v)を 0.1(0.01)1.、歪度 (S_k)を .1(.01)3. として母数a, bを求めた結果の一部を表一2 に示す。　上段が母数 a、下段が母数 b の値である。　我々が水文量統計解析で通常経験する変動係数と歪度の範囲では、母数 a が負となる場合が多いことがわかる。　母数 c は a,b が推定されれば、(5)式の第1式から容

Table 1　Summary of Equations

$$f(y;c,a,b) = [(y-c)/a]^{b-1}\exp[-(y-c)/a]\,[|a|\Gamma(b)]^{-1} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$A_{vy} = ab + c;\quad C_{vy} = |a|b^{1/2}/(ab+c);\quad S_{ky} = 2a/(|a|b^{1/2}) \quad \cdots (2)$$

$$f(x;c,a,b) = [(\ln x-c)/a]^{b-1}\exp[-(\ln x-c)/a]\,[|a|\Gamma(b)x]^{-1} \quad \cdots\cdots (3)$$

$$\mu'_{xr} = \exp(rc)(1-ra)^{-b};\quad 1-ra>0,\ r=1,2,3,\ldots, \quad \cdots\cdots (4)$$

$$A_v = f(c,a,b);\quad C_v = g(a,b);\quad S_k = h(a,b) \quad \cdots\cdots (5)$$

$$\text{where } f(c,a,b) = \exp(c)(1-a)^{-b} \quad \cdots\cdots (6)$$

$$g(a,b) = [(1-2a)^{-b} - (1-a)^{-2b}]^{1/2}/(1-a)^{-b} \quad \cdots\cdots (7)$$

$$h(a,b) = (1-3a)^{-b}-3(1-a)^{-b}(1-2a)^{-b}+2(1-a)^{-3b}/[(1-2a)^{-b} - (1-a)^{-2b}]^{3/2} \quad \cdots\cdots (8)$$

$$p = F(x) = \begin{cases} \gamma(b,w)/\Gamma(b) & a>0 \\ 1-[\gamma(b,w)/\Gamma(b)] & a<0 \end{cases} \quad \cdots\cdots (9)$$

$$\text{where } \gamma(b,w) = \int_0^w \exp(-t)t^{b-1}dt \quad \cdots\cdots (10)$$

$$z_T = \ln X_T = c + aw_T;\quad w_T = f(T,b) \quad \cdots\cdots (11)$$

$$X_T = \exp(z_T);\quad \mathrm{Var}(X_T) = X_T^2\mathrm{Var}(z_T);\quad \mathrm{S.E.}(\%) = 100\sqrt{\mathrm{Var}(z_T)} \ .\ (12)$$

$$\mathrm{Var}(z_T) = \mathrm{Var}(c)+2(\frac{\partial z_T}{\partial a})\mathrm{Cov}(c,a)+2(\frac{\partial z_T}{\partial b})\mathrm{Cov}(c,b)+(\frac{\partial z_T}{\partial a})^2\mathrm{Var}(a) +2(\frac{\partial z_T}{\partial a})(\frac{\partial z_T}{\partial b})\mathrm{Cov}(a,b)+(\frac{\partial z_T}{\partial b})^2\mathrm{Var}(b) \quad \cdots\cdots (13)$$

$$\frac{\partial z_T}{\partial a} = w_T;\quad \frac{\partial z_T}{\partial b} = a\frac{\partial}{\partial b}f(T,b) \quad \cdots\cdots (14)$$

$$w_T = f(T,b) = b(1-\frac{1}{9b}+\frac{t}{3\sqrt{b}})^3 \qquad [t = \text{standard normal variate}] \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial b}f(T,b) = (1-\frac{1}{9b}+\frac{t}{3\sqrt{b}})^2(1+\frac{2}{9b}-\frac{t}{6\sqrt{b}})$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{Var}(c)\\ \mathrm{Cov}(c,a)\\ \mathrm{Cov}(c,b)\\ \mathrm{Var}(a)\\ \mathrm{Cov}(a,b)\\ \mathrm{Var}(b)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16}\\ 0 & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26}\\ 0 & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36}\\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & s_{45} & s_{46}\\ 0 & 0 & 0 & s_{54} & s_{55} & s_{56}\\ 0 & 0 & 0 & s_{64} & s_{65} & s_{66}\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}\mathrm{Var}(A_v)\\ \mathrm{Cov}(A_v,C_v)\\ \mathrm{Cov}(A_v,S_k)\\ \mathrm{Var}(C_v)\\ \mathrm{Cov}(C_v,S_k)\\ \mathrm{Var}(S_k)\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (16)$$

$$s_{11} = (\partial f/\partial c)^2;\quad s_{12} = 2(\partial f/\partial c)(\partial f/\partial a);\quad s_{14} = (\partial f/\partial a)^2,\ \text{etc.}$$

$$f(x;a,k,b) = |b|x^{bk-1}\exp[-(x/a)^b]\,[a^{bk}\Gamma(k)]^{-1} \quad x>0 \quad \cdots\cdots (17)$$

易に推定できる。 LP3分布の分布関数 [F(x)] は (9) 式に示される。 今、再現期間を T とすれば、T一年確率水文量(X_T) は (11) 式で推定される。 ここで、w_T はaが正の時、非超過確率 1-1/Tに対応する (9) 式の標準ガンマ変量 w 、 a が負の時、超過確率 1/T に対応する (9) 式のガンマ変量 w である。 T一年確率水文量の分散 [Var(X_T)]、およびpercent standard error (S.E.) は (12) 式で示される。 この時、推定母数の分散・共分散が必要となり、これが (16) 式で与えられる。 変換行列の要素 s_{ij} は (5) 式に示される関数 f,g,h の分布母数に関する偏微係数を含む。 また、標本積率特性値のサンプリング エラー、Var(A_V) 等は文献 (2) に詳しいので、ここでは省略する。 (14) 式中の$\partial f(T,b)/\partial b$ はガンマ変量の母数 b に関する変動を表わす。 (11) 式の w_T は再現期間 T が指定されれば、b だけの関数となる。 したがって、w_T を b に関して多項式近似しておけば、その微係数は容易に求まる。 母数 b が 20 以上になると、ガンマ変量は実用上十分な精度で Wilson一Hilferty変換式により求めることができる。 この近似式が (15) 式に示される。 ここで、t は a が正の時、1-1/T 、a が負の時、1/T に対応する標準正規変量である。

Table 2 Parameters of a(upper) and b(lower), given C_V and S_k

S_k \ C_V	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.2	-0.04081 25.491	-0.23813 3.938	-0.81364 1.368	-3.27445 0.560	-112.761 0.171
0.4	-0.01981 103.971	-0.17347 6.717	-0.58805 2.085	-1.90935 0.878	-11.8915 0.364
0.6	-0.00073 74383.40	-0.12078 12.707	-0.43244 3.218	-1.25982 1.329	-4.64254 0.613
0.8	0.01667 136.455	-0.07709 28.896	-0.31927 5.095	-0.88918 1.975	-2.58485 0.945
1.0	0.03259 34.540	-0.04035 98.595	-0.23360 8.420	-0.65271 2.917	-1.68065 1.388
1.2	0.04721 15.957	-0.00905 1844.227	-0.16669 14.909	-0.49004 4.322	-1.18776 1.985
1.4	0.06067 9.380	0.01789 447.021	-0.11312 29.620	-0.37190 6.481	-0.88241 2.793
1.6	0.07311 6.284	0.04131 79.850	-0.06934 72.978	-0.28253 9.944	-0.67657 3.900
1.8	0.08463 4.569	0.06184 34.089	-0.03294 302.156	-0.21276 15.825	-0.52927 5.433
2.0	0.09532 3.513	0.07996 19.578	-0.00225 61108.19	-0.15688 26.654	-0.41906 7.596
2.2	0.10528 2.813	0.09606 13.069	0.02396 510.068	-0.11119 49.160	-0.33374 10.720
2.4	0.11456 2.323	0.11045 9.552	0.04658 128.672	-0.07318 106.139	-0.26587 15.364
2.6	0.12324 1.965	0.12339 7.417	0.06628 60.861	-0.04110 317.196	-0.21066 22.545
2.8	0.13136 1.695	0.13507 6.011	0.08359 36.802	-0.01368 2716.946	-0.16492 34.235
3.0	0.13899 1.485	0.14567 5.030	0.09890 25.369	0.01001 4834.273	-0.12645 54.663

3．適用例

対数ピアソン3型分布に関する厳密積率解法と WRC による近似積率解法の差異を実測資料を用いて比較検討する。 表一3の Method 1は厳密解、Method 2は近似解による結果である。 Method 2の平均値 (A_V) 、変動係数 (C_V)、および歪度 (S_k) は推定母数 c 、a 、b を (5) 式に代入した時の理論値である。 近似解による原系列の歪度は厳密解によるそれより大なることは漸近理論により知られている[3]。 したがって、近似解による T一年確率水文量は厳密解に比して過大な推定値となる。 LP3分布の厳密解によるT一年確率水文量の分散は今回の新しい知見である。 近似積率法は厳密積率法に比して、T一年確率水文量は小なる信頼度をもつことがわかる。 とくに、標本数が少なるにつれて、その差が顕著となる。 この解析例にもみられるように、LP3分布の推定母数 a が負となる場合が多くなることは前述した。 a が負値をもつとLP3分布は上限値をとり、この上限値を超える水文量が起り得ないという物理的不都合が生ずる。 この問題点がLP3分布の適用上の難点である。 この問題点を解決する一代替案として (17) 式の一般化ガンマ分布が考えられる。 この分布形は位置母数をもたない 3母数分布であり、原系列標本値の 3次までの積率を保存するように母数推定可能である[4]。

Table 3 Application Examples

	Site A (N = 24)		Site B (N = 60)	
	Method 1	Method 2	Method 1	Method 2
A_V (m^3/s)	1362.5	1371.6	703.9	707.4
C_V	0.526	0.551	0.511	0.545
S_k	0.530	1.006	1.067	1.931
c	8.345	9.178	8.972	-7.314
a	-0.317	-0.170	-0.112	0.018
b	4.095	12.481	22.742	754.153
X_{100} (m^3/s)	3199.7	3663.2	1808.3	2049.8
S.E. (%)	13.2	26.9	13.6	17.9
X_{200} (m^3/s)	3361.9	3993.0	1978.2	2340.0
S.E. (%)	15.1	31.6	16.2	21.1
X_{500} (m^3/s)	3535.6	4401.7	2194.0	2750.0
S.E. (%)	17.8	38.2	19.8	25.4

Site A; Maximum daily flow at Hashimoto of the Ishikari River, Japan
Site B; Maximum annual flow at South Fork of the Skykomish River near Index, Washington

参考文献

1) Benson, M.A., Uniform flood frequency estimating methods for federal agencies, WRR, 4(5), 891-908, 1968. 2) Bobée, B., Sample error of T-year events computed by fitting a Pearson type 3 distribution, WRR, 9(5), 1264-1270, 1973. 3) Bobée, B., The log Pearson type 3 distribution and its application in hydrology, WRR, 11(5), 681-689, 1975. 4) 星,豊沢：一般化ガンマ分布の水文統計への適用、土木学会北海道支部報告集、第35号、180一185、1979。