II-3　多変数同時分布に基づく洪水生起確率の算定

京都大学防災研究所　正員　池淵周一

1.はしがき　水系一貫した治水計画の策定には複数評価地点において，ダム操作・破堤氾濫効果などを考慮した洪水の時・空間同時生起確率の算定が必要である。この算定に関して，従来，shift-operation概念を基礎に discrete-type の展開を試みてきたが[1]，ここでは多変数同時分布の誘導を基礎に Continuous type の展開をはかる。

2.降雨の時・空間確率構造　いま，対象とする流域を観測網，施設群，評価地点などを考慮して部分流域に分割する。部分流域 $i\ (i=1,\cdots,N)$ の降雨を $R_i(t)$ で表現し，その平均値および共分散行列を時間的にも空間的にも一様でないとして次式で与える。$E\{R(t)\}=\{E(R_1(t)),\cdots,E(R_N(t))\}=\{m_1(t),\cdots,m_N(t)\}$ ……(1)

$$Cov\{R(t),R(t+n\Delta t)\}=\begin{bmatrix}\sigma_{11}(t,n\Delta t),\cdots\cdots,\sigma_{1N}(t,n\Delta t)\\ \vdots \\ \sigma_{N1}(t,n\Delta t)\cdots\cdots,\sigma_{NN}(t,n\Delta t)\end{bmatrix}\quad (n=0,1,\cdots)\ \cdots\cdots(2)$$

3.降雨から部分流域流量への変換　降雨から部分流域末端流量への変換モデルとして単位図を用いる。以下の理論構成上，部分流域流量の平均値，共分散行列が必要であり，非線形流出モデルを用いた場合は，多数のシミュレーションをへて算定することになる。ここでは理論展開を容易にすること，またこの近似が最終結果，それは実測流量の多変数分布で評価されることになるが，どの程度の近似度で説明できるかを考察する意味で単位図を用いたのである。部分流域の単位図を $h_i(\tau)$ で表現すると，各部分流域末端流量は次式で与えられる。$q_i(t)=\sum_{\tau=0}^{T_i}a_i\cdot h_i(\tau)\cdot R_i(t-\tau)$ ……(3)　ここに，a_i は部分流域面積である。したがって，部分流域流量の平均値および共分散行列はそれぞれ次式で与えられる。$E\{q(t)\}=\{E(q_1(t)),\cdots,E(q_N(t))\}=\{a_1h_1*m_1(t),\cdots,a_Nh_N*m_N(t)\}$ ……(4)

$$Cov\{q(t),q(t+n\Delta t)\}=\begin{bmatrix}\sum_{\tau_1=0}^{T_1}\sum_{\tau_2=0}^{T_1}a_1a_1h_1(\tau_1)h_1(\tau_2)\sigma_{11}(t,n\Delta t+\tau_1-\tau_2),\cdots,\sum_{\tau_1=0}^{T_1}\sum_{\tau_N=0}^{T_N}a_1a_Nh_1(\tau_1)h_N(\tau_N)\sigma_{1N}(t,n\Delta t+\tau_1-\tau_2)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{\tau_N=0}^{T_N}\sum_{\tau_1=0}^{T_1}a_Na_1h_N(\tau_N)h_1(\tau_1)\sigma_{N1}(t,n\Delta t+\tau_N-\tau_1),\cdots\sum_{\tau_N=0}^{T_N}\sum_{\tau_1=0}^{T_N}a_Na_Nh_N(\tau_N)h_N(\tau_1)\sigma_{NN}(t,n\Delta t+\tau_N-\tau_1)\end{bmatrix}\cdots(5)$$

ここに，$*$ は Convolution を意味する。

4.部分流域流量の合成　1)自然流下の場合：流量の河道流下過程に関しては線形合流・単純時間遅れ系を仮定する。これも一つの近似であるが，最近，石原(安)らの研究で実測流量との一致度もかなり高いようであり，理論展開の容易さからこの仮定を用いる。いま，線形河道の応答関数は $\delta(t-\tau_i)$ で表わされるから，Fig.1 の河川システムに対して平均値および共分散行列を展開すると，$E[Q_1(t)]=E[q_1(t-\tau_1)+q_2(t)]$

$E[Q_2(t)]=E[q_1(t-\tau_1-\tau_2)+q_2(t-\tau_2)+q_3(t)]$ ……(6)，$Cov[Q_1(t),Q_2(t)]=Cov(q_2(t),q_3(t))+Cov(q_2(t),q_2(t-\tau_2))+Cov(q_2(t),q_1(t-\tau_1-\tau_2))+Cov(q_1(t-\tau_1),q_3(t))+Cov(q_1(t-\tau_1),q_2(t-\tau_2))+Cov(q_1(t-\tau_1),q_1(t-\tau_1-\tau_2))$ ……(7)

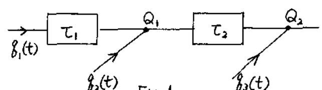

Fig 1.

上式の各項の Cov. は上述の $Cov(q(t),q(t+n\Delta t))$ 行列から求まる。結局，$Cov(Q(t),Q(t))=$［河道ネットワーク構造と $Cov(q(t),q(t+n\Delta t))$ の関数］となる。2)ダム貯水池操作・破堤氾濫効果を考慮する場合：いま，i 地点にダムがある場合，ダム流入量系列と放流量系列の間に応答関数 $h_i'(\tau)$ を導入する。たとえば，Fig.2 の河川システムを考えると，平均値および共分散は，$E[Q_1(t)]=E(q_2(t))+h_1'*E(q_1(t))$，$E[Q_2(t)]=E(q_3(t))+E(q_2(t-\tau_2))+h_1'*E(q_1(t-\tau_2))$ ……(8)

$Cov(Q_1(t),Q_2(t))=Cov(q_2(t),q_3(t))+Cov(q_2(t),q_2(t-\tau_2))+\sum_{\tau=0}^{T_1'}h_1'(\tau)Cov(q_2(t),q_1(t-\tau_2-\tau))+\sum_{\tau=0}^{T_1'}h_1'(\tau)Cov(q_3(t),q_1(t-\tau))$
$+\sum_{\tau=0}^{T_1'}h_1'(\tau)Cov(q_2(t-\tau_2),q_1(t-\tau))+\sum_{\tau=0}^{T_1'}\sum_{\tau'=0}^{T_1'}h_1'(\tau)h_1'(\tau')Cov(q_1(t-\tau),q_1(t-\tau_2-\tau'))$ ……(9)　で与えられる。

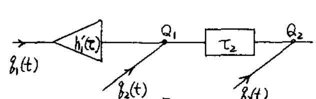

Fig.2

破堤氾濫効果もダム貯水池操作と同様に，破堤前の流入ハイドログラフと破堤後の流出ハイドログラフの間に応答関数 $h_i''(\tau)$ を仮定すると，全く同じ展開が可能である。このように考えると，ダム貯水池・破堤氾濫効果を考慮した河川システムに対しては平均値および共分散行列がつぎの関数として表現される。$U(t)=\{m_{Q_1}(t),\cdots,m_{Q_m}(t)\}=$｛河道ネットワーク構造，貯水池・破堤箇所の配置構造，τ_i（河道のおくれ時間），$h_i'(\tau)$，$h_i''(\tau)$，$E[q(t)]$ の関数｝……(10)

$$\Sigma(t)=Cov(Q(t),Q(t))=\begin{bmatrix}r_{Q_1(t)Q_1(t)}\cdot S_{Q_1(t)}\cdot S_{Q_1(t)} & r_{Q_1(t)Q_2(t)}\cdot S_{Q_1(t)}\cdot S_{Q_2(t)}\cdots\cdots & \\ \vdots & r_{Q_i(t)Q_j(t)}\cdot S_{Q_i(t)}\cdot S_{Q_j(t)}\cdots & \vdots \\ r_{Q_m(t)Q_1(t)}\cdot S_{Q_m(t)}\cdot S_{Q_1(t)} & \cdots\cdots & r_{Q_m(t)Q_m(t)}\cdot S_{Q_m(t)}\cdot S_{Q_m(t)}\end{bmatrix}$$

=｛河道ネットワーク構造，貯水池・破堤箇所の配置構造，τ_i，$h_i'(\tau)$，$h_i''(\tau)$，$Cov(q(t),q(t+n\Delta t))$ の関数｝……(11)　ここに，$r_{Q_i(t)Q_j(t)}$ は $Q_i(t)$，$Q_j(t)$ の相関係数，$S_{Q_i(t)}$ は $Q_i(t)$ の標準偏差を表現している。

5.m 次元対数正規分布　ところで，降雨から線形変換プロセスをへて算定された m 個の評価地点流量はいかなる多変数同時分布をとるか，これが本論文での最大の仮定である。降雨は非対称度の高い指数分布にしたがって

おり，そのいくつもの線形変換（降雨は互いに時間的，空間的に従属している），これは一種の和分布を構成している。従来，ガンマ分布の和分布はガンマ分布で近似できるとされており，しかも和をとる項数がある程度大きいとガンマ分布は対数正規分布に類似してくる，あるいは対数正規分布で近似してもよい。こうした条件が満足されていると考え，上記 $\mathbf{Q}(t)$ が m 次元対数正規分布で表現されると仮定する。すなわち，$\mathbf{Q}'(t) = \ln \mathbf{Q}(t)$ と対数変換された $\mathbf{Q}'(t)$ は m 次元正規分布をする。いま，$\mathbf{Q}'(t)$ の平均値関数 $\mathbf{U}'(t)$，共分散行列 $\mathbf{\Sigma}'(t)$ を (12), (13) 式で表現すると，各要素は $\mathbf{Q}(t)$ の平均値関数 $\mathbf{U}(t)$，共分散行列 $\mathbf{\Sigma}(t)$ の各要素との間に (14) 式のような関係がある。

$$\mathbf{U}'(t) = \left(m_{Q_1'(t)}, \cdots\cdots, m_{Q_m'(t)} \right) \cdots\cdots (12) \ , \quad \mathbf{\Sigma}'(t) = Cov\left(\mathbf{Q}'(t), \mathbf{Q}'(t) \right) = \begin{bmatrix} r_{Q_1'(t)Q_1'(t)} \cdot S_{Q_1'(t)} \cdot S_{Q_1'(t)} & \cdots\cdots & r_{Q_1'(t)Q_m'(t)} \cdot S_{Q_1'(t)} S_{Q_m'(t)} \\ \vdots & r_{Q_i'(t)Q_j'(t)} S_{Q_i'(t)} S_{Q_j'(t)} \cdots & \\ r_{Q_m'(t)Q_1'(t)} S_{Q_m'(t)} S_{Q_1'(t)} & \cdots\cdots & r_{Q_m'(t)Q_m'(t)} S_{Q_m'(t)} S_{Q_m'(t)} \end{bmatrix} \cdots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} & m_{Q_i'(t)} = \ln\left(m_{Q_i(t)} \right) - \left(S^2_{Q_i'(t)} \right)^{1/2}, \quad S^2_{Q_i'(t)} = \ln\left\{ \frac{S^2_{Q_i(t)}}{m^2_{Q_i(t)}} + 1 \right\} \\ & r_{Q_i'(t)Q_j'(t)} \cdot S_{Q_i'(t)} S_{Q_j'(t)} = \ln\left\{ 1 + r_{Q_i(t)Q_j(t)} \sqrt{\left(e^{S^2_{Q_i(t)}} - 1\right)\left(e^{S^2_{Q_j(t)}} - 1\right)} \right\} \end{aligned} \right\} \cdots (14)$$

こうした関係式のもとで $\mathbf{Q}'(t)$ の m 次元正規分布は，$P_r\left(Q_1'(t), \cdots\cdots, Q_m'(t)\right) = \sqrt{A(t)/(2\pi)^m} \cdot \exp\left(-X(t)/2\right) \cdots (15)$，$X(t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t) \cdot \left(Q_i'(t) - m_{Q_i'(t)}\right)\left(Q_j'(t) - m_{Q_j'(t)}\right) \cdots (16)$ で与えられる。ここに，$A(t) = \{a_{ij}(t)\}$ であり，共分散行列 $\mathbf{\Sigma}'(t)$ との間に次式の関係がある。$A^{-1}(t) = \mathbf{\Sigma}'(t) \cdots\cdots (17)$

6. m 次元正規分布の非超過確率　いま，5. で述べた行列 $A(t)$ の固有根を $\lambda_1(t), \cdots\cdots, \lambda_m(t)$ とするとき，適当な直交変換，$Q_i'(t) - m_{Q_i'(t)} = \sum_{j=1}^{m} l_{ij}(t) u_j(t)$，$(i=1, \cdots\cdots, m)$（$l_{ij}(t)$ で行った行列は直交行列）をおこなうと，$X(t) = \lambda_1(t) u_1^2(t) + \cdots\cdots + \lambda_m(t) u_m^2(t) \cdots\cdots (18)$ となる。$\lambda_1(t), \cdots\cdots, \lambda_m(t)$ は正であるから，$\sqrt{\lambda_i(t)}\, u_i(t) = v_i(t) \cdots (19)$ とおくと，確率変数の変換公式から，$v_1(t), \cdots\cdots, v_m(t)$ の確率密度関数 $f(v_1(t), \cdots\cdots, v_m(t))$ は次式で与えられる。$f(v_1(t), \cdots\cdots, v_m(t)) = 1/(2\pi)^{m/2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(v_1^2(t) + \cdots\cdots + v_m^2(t)\right)\right) \cdots\cdots (20)$，$X(t) = v_1^2(t) + \cdots\cdots + v_m^2(t)$ の累積分布関数を $F(X(t))$ とすれば，$F(X_0(t)) = P_r\left(v_1^2(t) + \cdots\cdots + v_m^2(t) \le X_0(t)\right) = \int_{\sum_{i=1}^{m} v_i^2(t) \le X_0} \cdots\cdots \int f(v_1(t), \cdots\cdots, v_m(t))\, dv_1(t) \cdots dv_m(t) \cdots\cdots (21)$　(21)式は途中の誘導[2]を省略するが自由度 m の χ^2 分布関数となる。すなわち，$F(X_0) = 2/2^{m/2} \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \int_0^{X_0} r^{m-1} e^{-r^2/2}\, dr \cdots (22)$　したがって，m 次元正規分布の非超過確率は χ^2 分布関数表から算定することができる。

7. 洪水生起確率の算定　5.，6. で展開した m 次元分布を基礎に，洪水の生起確率を算定することができる。まず，m 個の評価地点において，ある時刻 t で同時に洪水が生起する確率は，$P_r\left(Q_1(t) \ge Q_1^a, \cdots\cdots, Q_m(t) \ge Q_m^a\right) \cdots (23)$ で与えられる。また，ある任意の評価地点における洪水生起確率は，$P_r\left(Q_i(t) \ge Q_i^a\right) \cdots (24)$ で定義されよう。ここに，Q_i^a は i 評価地点での許容流量あるいは河道疏通能力を意味する。$Q_i(t)$，Q_i^a はいずれも対数変換したものであると考えると，(23) 式，(24)式は m 次元正規分布を用いて，(23)式 $= \int_{Q_1^a}^{\infty} \cdots \int_{Q_m^a}^{\infty} P_r\left(Q_1(t), \cdots\cdots Q_m(t)\right) dQ_1(t) \cdots dQ_m(t) = 1 - \int_0^{Q_1^a} \cdots \int_0^{Q_m^a} P_r\left(Q_1(t), \cdots\cdots Q_m(t)\right) dQ_1(t) \cdots dQ_m(t)$，(24)式 $= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{Q_i^a}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} P_r\left(Q_1(t), \cdots, Q_m(t)\right) dQ_1(t) \cdots dQ_m(t) = \int_{Q_i^a}^{\infty} P_r\left(Q_i(t)\right) dQ_i(t) = 1 - \int_0^{Q_i^a} P_r\left(Q_i(t)\right) dQ_i(t)$　となり，6. で展開した χ^2 分布関数より算定することができる。つぎに，洪水継続時間にわたっての洪水生起確率を算定するには，つぎの条件つき確率が必要である。すなわち，$P_r\left(Q_1(t+1), \cdots\cdots, Q_m(t+1) \mid Q_1(t), \cdots, Q_m(t)\right) = P_r\left(Q_1(t+1), \cdots\cdots, Q_m(t+1), Q_1(t), \cdots, Q_m(t)\right) / P_r\left(Q_1(t), \cdots, Q_m(t)\right)$ $=$ $2m$ 次元の正規分布／m 次元の正規分布 $\cdots$ (25)，したがって，$P_r\left(\mathbf{Q}(0) \ge \mathbf{Q}^a, \mathbf{Q}(1) \ge \mathbf{Q}^a, \cdots\cdots, \mathbf{Q}(T) \ge \mathbf{Q}^a\right) = P_r\left(\mathbf{Q}(0) \ge \mathbf{Q}^a\right) P_r\left(\mathbf{Q}(1) \ge \mathbf{Q}^a \mid \mathbf{Q}(0) \ge \mathbf{Q}^a\right) \cdots\cdots P_r\left(\mathbf{Q}(T) \ge \mathbf{Q}^a \mid \mathbf{Q}(T-1) \ge \mathbf{Q}^a\right) \cdots\cdots (26)$　ここに，$\mathbf{Q}(t) = \left(Q_1(t), \cdots\cdots, Q_m(t)\right)$，$T$ は洪水継続時間である。5.，6. での議論を２m 次元にまで拡張することによって，同様に(25)式を展開することができ，その展開式を(26)式に代入することによって，ある任意時間での洪水生起確率に加え，T 洪水継続時間にわたっての洪水生起確率を算定することができる。

8. あとがき　本論文はダム操作・破堤氾濫効果をうけた河川システムの複数評価地点における洪水生起確率を多変数同時分布に基づき算定する方法論を展開したものである。既設，新規のダム施設群の規模・配置・操作ルール，河道改修規模，遊水池施設の規模・配置などの組合せに対する洪水の生起確率が算定されると，それと許容しうる，あるいは覚悟すべき確率との比較検討により，物理的評価基準のもとでのいくつかの計画代替案が選択され，その代替案のなかで，たとえば総費用最小化といった経済的評価基準を設けてそれに見合った一つの治水計画が策定されていこう。現時点では理論構成に終始しているが，今後は実際データを解析し，本論の有効性を実証していきたい。　参考文献 1) 高棹・池淵・横田；洪水の時空間生起確率算定に関する2,3の考察，土木学会関西支部，昭54.6，2) 奥川：数理統計学概説