

広島工業大学 正員 中山 隆弘
大阪大学工学部 正員 小松 定夫

1. まえがき 筆者らはこれまで、風・地震などの不規則変動荷重を受ける構造物の降伏破壊に対する動的信頼性に関する基礎的研究を行ない、結果を2, 3の論文にとりまとめ発表してきた¹⁾。一連の研究過程で主として目的としたことは、材料強度の統計的なばらつきが構造物の信頼性に与える影響を定量的に把握することであり、そのために材料強度の確率分布特性が、構造物の振動継続時間の間、変化しないものと仮定して、初通過破壊確率に直接関係する強度超過率の算定式を誘導した。今回はさらに、構造物の振動継続時間中の任意時刻における材料強度の確率密度関数が、その時刻以前の振動応力の最大値によって条件付けられることを考慮に入れて、ある一定時間に渡って不規則振動を呈する構造物の強度超過率の算定式を新たに導き、数値計算によって上述の仮定に対する検討を行なった。本報告は、対象と長時間に渡り定常正規確率過程に従う不規則変動外力を受ける構造物に限定し、新たな強度超過率の算定式の誘導過程と、それに基づく若干の数値計算結果を提示したものである。

2. 基礎式 定常不規則外力を受ける構造物のある主要な点における、ある種の振動応力 $x(t)$ が零平均値を有する定常正規確率過程に従うものとし、その導関数を $\dot{x}(t)$ 、それらの結合確率密度関数を $f_{xx}(x, \dot{x})$ により表わす。なお文中の太文字は、その変数が確率量であることを示す。さらに図1に示すように、時刻 t_i における材料強度の確率密度関数と、 $(0, t_i)$ の振動応力の最大値 $x_{\max}(t_i)$ を下限とする条件付確率密度関数として、 $f_s(0.15 \geq x_{\max}(t_i))$ によって表わす。このとき時刻 t_i において、 $x(t)$ が正の勾配で、正の材料強度を越える場合の強度超過率 $\mu_x^+(S, t_i)$ は

$$\mu_x^+(S, t_i) = \int_{x_{\max}(t_i)}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \dot{x} f_{xx}(x, \dot{x}) d\dot{x} \right\} f_s(0.15 \geq x_{\max}(t_i)) ds \quad (1)$$

と表わされる。¹⁾ $x(t)$ は零平均値を有する定常正規確率過程であるから

$$f_{xx}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}\right) \quad (2)$$

であり、式(2)を式(1)へ代入することによって次式が得られる。なお式(2)における σ_x^2 , $\sigma_{\dot{x}}^2$ は、それぞれ $x(t)$ および $\dot{x}(t)$ の分散である。

$$\mu_x^+(S, t_i) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \int_{x_{\max}(t_i)}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_x^2}\right) f_s(0.15 \geq x_{\max}(t_i)) ds \quad (3)$$

さらに式(3)における $x_{\max}(t_i)$ の確率分布関数を $F_{x_{\max}}(x, t_i)$ とし、同式を書き改めれば次式が得られる。

$$\mu_x^+(S, t_i) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} f_s(s) F_{x_{\max}}(s, t_i) ds} \int_{x_{\max}(t_i)}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_x^2}\right) f_s(s) F_{x_{\max}}(s, t_i) ds \quad (4)$$

式中 $f_s(s)$ は荷重を受ける以前の材料強度の確率密度関数である。

いま式(4)で与えられる $\mu_x^+(S, t_i)$ の確率密度関数を $f_{\mu_x^+}(w, t_i)$ とし、新たに次式によって強度超過率を定義する。ただし式中の R_{μ} は $\mu_x^+(S, t_i)$ の集合体を表わす。

$$\mu_x^+(S, t_i) = \int_{R_{\mu}} w f_{\mu_x^+}(w, t_i) dw \quad (5)$$

さて $F_{x_{\max}}(x, t_i)$ の厳密解はいまだ得られていないが、ここでは $x(t_i)$ が、零平均値および正規定常性の条

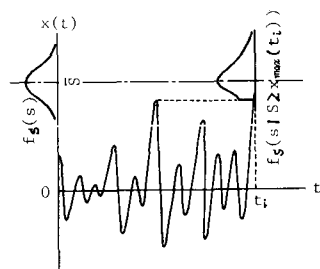


図1. 変動応力が材料強度を越える現象の概略図

件に加えて、緩滞域の特性をもっているものとして、次の近似式²⁾を用いる。

$$F_{x_{max}}(z, t_i) = \exp\left\{-\exp\left\{-a(t_i)\left(\frac{z}{\sigma_x} - a(t_i)\right)\right\}\right\} \quad (6)$$

式中 $a(t_i) = \sqrt{2 \ln \nu_0 t_i}$, $\nu_0 = \sigma_x / (2\pi \sigma_x)$ である。

いま材料強度が正規分布するものとし、その平均値を $\bar{s}$ 、変動係数を δ_s とする。また $\bar{m} = \bar{s} / \sigma_x$ および $\alpha(t_i) = x_{max}(t_i) / \sigma_x$ なる無次元パラメータを導入する。そして式(6)を式(4)へ代入し、さらに $s^* = s / \sigma_s$ (s^* も無次元量)なる変数変換を行なえば次式が得られる。

$$\mu_x^+(s, t_i) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_x}{\sigma_s} \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^{*2}}{2} + \frac{s^*}{\delta_s}\right) \exp\left\{-\exp\left\{-a(t_i)(\bar{m}\delta_s s^* - a(t_i))\right\}\right\} ds^*} \times \int_{\frac{\alpha(t_i)}{\bar{m}\delta_s}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1+\bar{m}^2\delta_s^2}{2} s^* + \frac{s^*}{\delta_s}\right) \exp\left\{-\exp\left\{-a(t_i)(\bar{m}\delta_s s^* - a(t_i))\right\}\right\} ds^* \quad (7)$$

式(7)と式(5)によって、材料強度の確率分布の時間変化を考慮した強度超過率を算定できる。ただし式(6)が、 σ_x に比べ $z = x_{max}(t_i)$ がかなり大きく、 z も大きい領域でのみ近似的に成立することから、後述するように、時間 t_i に対する式(7)の適用限界は勿論存在する。

3. 数値計算結果および考察 材料強度が、変動係数 0.10 なる正規分布するとし、さらに σ_x / σ_s を 2π とする。種々の $\bar{m}$, t_i に対して求めた強度超過率の計算結果に基づいて、前述の仮定の問題を検討する。下に図2に示す、 $x_{max}(t_i)$ を σ_x で無次元化した $\alpha(t_i)$ の確率密度関数(式(6)の z に関する一階微分で与えられる)から理解できるように、 t_i が 100 sec と比較的小さい場合には式(6)が成立し難いので、今回は t_i としてはそれ以上のかかなり大きな値を用いた。

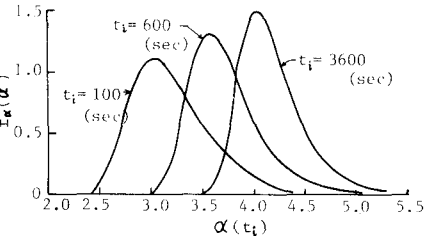


図2. $\alpha(t_i)$ の確率密度関数(t_i による形状変化)

計算の結果を図3に示す。なお図中へ破線は、精度が余り得られないことを認識した上で数値計算を行ない求めた結果であり、 $t_i = 0$ に対する値は、文献1)で誘導した算定式に基づいて計算したものである。さて図3は、構造物の信頼度を決定する主要な因子である $\bar{m}$ (材料強度の平均値 $\bar{s}$ と、変動応力の r.m.s. 値 σ_x との比) の値にかかわらず、強度超過率は振動の継続時間中、時間と共に単調減少することを定量的に示している。また同図よりその減少率は $\bar{m}$ の値にかかなり強く影響され、 $\bar{m}$ が増大するに従い、強度超過率の時間的変化率が小さくなることが分かる。このことから、 $\bar{m}$ が3ないし4の場合には、材料強度の確率分布特性の時間的変化を無視して求めた初通過破壊確率は、安全側に過ぎる値であるともいえるが $\bar{m}$ が6と大きい場合には、計算の簡便性から考えて、必ずしもその判断が妥当であるとはいえないと考える。

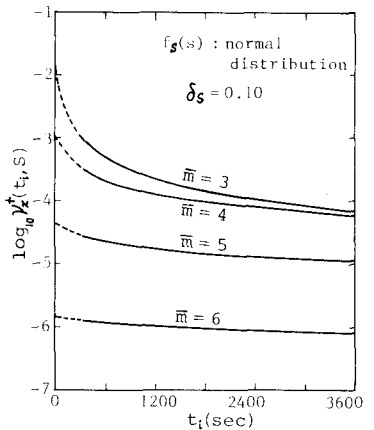


図3. 振動継続時間中における強度超過率の時間的変化

4. あとがき 材料強度のばらつきを考慮し、さらにその確率密度関数が構造物の応答履歴に影響されるとすれば、例え構造物が定常不規則振動を呈するとしても、その強度超過率は時間的に変化し、またその変化率が無次元パラメータ $\bar{m}$ に大きく影響を受けることを数値的に示した。さらに引き続き検討を進めてゆきたい。

<参考文献>

- 1) 小松・中山: 材料強度のばらつきを考慮した定常不規則振動体の初通過破壊確率の研究, 土木学会論文報告集, No. 250, 1976年6月 など
- 2) 小西・藤塚: 不規則現象と安全性(第2回), JSSC, Vol. 11, No. 111, 1975年3月