I-301 不確定パラメーターを有する構造物系の非定常r.m.s.応答解析

長崎大学工学部　正員　岡林隆敏

1．はじめに　地震，風荷重等の不規則な外力を受ける構造物の応答解析においては，構造物は解析可能な力学モデルに単純化されると同時に，外力も確率過程によりモデル化される。一般に，構造物に作用する外力のモデル化に伴う不確定性は大きい。しかし，構造物においても，モデル化に伴うばらつき，材料強度等の不確定要因は，力学モデルの中に持ち込まれる。また，走行車両による橋梁の応答解析では，特定の車両による応答ではなく，車両の変動，例えば，車両重量，固有振動数，減衰定数等の変動を考慮した，応答の平均的な挙動を表現する解析が望まれる。本研究では，このような構造物の解析モデルを構成すると共に，具体的な解析手法として二つの解法（摂動法，階層法）を提案した。不規則外力を受ける構造物系の応答において，系のパラメーターが確率変数となると，外力に対する応答の二乗平均値は確率変数となる。ここでは，この二乗平均値の系のパラメーターに対する平均値について検討したものである。

2．力学モデルの表現　非定常不規則外力を受ける構造物系の運動方程式は，状態空間でベクトル表示すると，(1)式で記述される。非定常外力を，(2)式のように，確定関数と確率過程の積で表わされるものと考え，確率過程は，(3)式のフィルターの方程式の出力として与えられるものとする。この時，構造物－フィルター系は，(4)式の伊藤型の確率微分方程式で表現できる。一般性を失うことなく，(4)式の解過程の平均値応答は0であるものとする。このとき，外力$W(t)$に対する解過程$X(t)$の共分散行列$R_X(t)$を$R_X(t)=E[X(t)X(t)^T]$で定義すると，この時間的変化は，(5)式の共分散方程式に支配される。ここにE[ ]は確率過程に対する平均の演算子である。

次に，確率微分方程式の係数が確率変数である場合，その確率変数の集合をΛで表し，$\Lambda=\{\Lambda_1,\Lambda_2,\cdots\Lambda_n\}$で定義する。$\Lambda_1\cdots\Lambda_n$の実現値の集合を$\lambda=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n\}$により定義する。さらに，$\Lambda$の確率密度関数を$P(\Lambda)$で定義する。$\Lambda$に関する平均の演算子を< >の記号で表す。本研究で求める量は，応答の分散・共分散の確率変数Λに対する平均値であるから，これは，次式で与えられる。

構造物系

$$\dot{Y}(t)=C(t)Y(t)+F(t),\quad Y(t_0)=Y_0 \qquad \text{---- (1)}$$

$Y(t)$, $F(t)$ ：n_1次元ベクトル

非定常不規則外力

$$F(t)=D(t)\cdot Z(t) \qquad \text{--- (2)}$$

$D(t)$：確定時間関数，$(n_2\times n_2)$行列

$Z(t)$：確率過程，n_2ベクトル

フィルター系

$$\dot{Z}(t)=E(t)Z(t)+W_Z(t) \qquad \text{--- (3)}$$

$W_Z(t)$ ：n_2次元白色雑音過程ベクトル

構造物－フィルター系

$$X(t)=A(t)X(t)+B(t)W(t),\quad X(t_0)=X_0 \qquad \text{--- (4)}$$

$X(t)$：$n(n_1+n_2)$次元ベクトル

$W(t)$：n次元白色雑音過程

共分散方程式

$$\left.\begin{aligned}\dot{R}_X(t)&=A(t)R_X(t)+R_X(t)A(t)^T+B(t)QB(t)^T\\ R_X(t_0)&=R_{X0}\end{aligned}\right\}\ (5)$$

$$\langle R_X(t,\Lambda)\rangle=\int R_X(t,\lambda)P(\lambda)d\lambda \qquad \text{----- (6)}$$

このような確率変数Λを含む確率微分方程式と対応する共分散方程式を次式で記述する。

$$X(t,\Lambda)=A(t,\Lambda)X(t)+B(t,\Lambda)W(t) \qquad \text{----- (7)}$$

$$\dot{R}_X(t,\Lambda)=A(t,\Lambda)R_X(t,\Lambda)+R_X(t,\Lambda)A(t,\Lambda)^T+B(t,\Lambda)QB(t,\Lambda)^T \qquad \text{----- (8)}$$

ここで，共分散$R_X(t,\Lambda)$も確率変数となり，この式も確率微分方程式になる。

3．摂動法による定式化　確率変数Λは，一般に，平均値$\langle\Lambda\rangle$と平均値回りの変動Eに分離することができる。

$$\Lambda=\langle\Lambda\rangle+E$$

ただし　$E=\{\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n\}^T$　である。このとき，$A(t,\Lambda)$，$B(t,\Lambda)$，$X(t,\Lambda)$は以下のように展開できる。変動$E(t)$が微小である場合，ε_iの2次の項まで考慮すると，応答の共分散は次式で与えられる。

$$A(t,\Lambda)=A_0(t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_iA_i(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j\cdot A_{ij}(t)+\cdots \qquad (10)$$

$$B(t,\Lambda)=B_0(t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_iB_i(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j\cdot B_{ij}(t)+\cdots \qquad (11)$$

$$X(t,\Lambda)=X_0(t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_iX_i(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j\cdot X_{ij}(t)+\cdots \qquad (12)$$

$$\langle \mathbb{R}_x(t,\Lambda)\rangle = \mathbb{R}_{x_0}(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2\,\mathbb{R}_{x_i x_j}(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2\left(\mathbb{R}_{x_0 x_{ij}}(t) + \mathbb{R}_{x_0 x_{ij}}(t)^T\right) \quad \text{-----}\ (13)$$

ここに，$\sigma_{ij}^2 = \langle \varepsilon_i \varepsilon_j \rangle$ であり，$\mathbb{R}_{x_0}(t)$，$\mathbb{R}_{x_i x_j}(t)$，$\mathbb{R}_{x_0 x_{ij}}(t)$ は $E[X_0(t)X_0(t)^T]$，$E[X_i(t)X_j(t)^T]$，$E[X_{ij}(t)X_0(t)^T]$ である。従って $\langle \mathbb{R}_x(t,\Lambda)\rangle$ の解析は，$\mathbb{R}_{x_0}(t)$，$\mathbb{R}_{x_i x_j}(t)$，$\mathbb{R}_{x_0 x_{ij}}(t)$ の解析に帰着する。(10)，(11)，(12)式を(7)式に代入し，改めて確率微分方程式を構成する。次に対応する共分散方程式を誘導すると，連成した次の共分散方程式が得られる。

非定常応答解析では，これらの連成した微分方程式を解くことにより，分散・共分散応答が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\mathbb{R}}_{x_0}(t) &= \mathbb{A}_0(t)\mathbb{R}_{x_0}(t) + \mathbb{R}_{x_0}(t)\mathbb{A}_0(t)^T + \mathbb{B}_0(t)\mathbb{S}\mathbb{B}_0(t)^T \\
\dot{\mathbb{R}}_{x_0 x_i}(t) &= \mathbb{A}_0(t)\mathbb{R}_{x_0 x_i}(t) + \mathbb{R}_{x_0 x_i}(t)\mathbb{A}_0(t)^T + \mathbb{A}_i(t)\mathbb{R}_{x_0}(t)^T + \mathbb{B}_0(t)\mathbb{S}\mathbb{B}_i(t)^T \\
\dot{\mathbb{R}}_{x_i x_j}(t) &= \mathbb{A}_0(t)\mathbb{R}_{x_i x_j}(t) + \mathbb{R}_{x_i x_j}(t)\mathbb{A}_0(t)^T + \mathbb{A}_j(t)\mathbb{R}_{x_0 x_i}(t)^T + \mathbb{R}_{x_0 x_i}(t)\mathbb{A}_i(t)^T \\
&\quad + \mathbb{B}_i(t)\mathbb{Q}\mathbb{B}_j(t)^T \qquad (i, j = 1, 2, \cdots n) \\
\dot{\mathbb{R}}_{x_{ij} x_0}(t) &= \mathbb{A}_0(t)\mathbb{R}_{x_{ij} x_0}(t) + \mathbb{R}_{x_{ij} x_0}(t)\mathbb{A}_0(t)^T + \mathbb{A}_{ij}(t)\mathbb{R}_{x_0}(t) \\
&\quad + \mathbb{A}_i(t)\mathbb{R}_{x_j x_0}(t) + \mathbb{A}_j(t)\mathbb{R}_{x_i x_0} + \mathbb{B}_{ij}(t)\mathbb{Q}\mathbb{B}_0(t)^T \\
&\qquad (i, j = 1, 2, \cdots n,\ i \neq j)
\end{aligned}\right\} (14)$$

4. 階層法による定式化

階層法では，(8)式の共分散方程式を基礎式とする。これはマトリックス方程式であるから，適当な変換を行うことにより，$n(n+1)/2$ のベクトルを変数とする方程式に変形することが可能である。$\mathbb{G}(t,\Lambda)$ および $\mathbb{F}(t,\Lambda)$ は，確率変数を陽に表した(16)，(17)式で表わすことができる。

$$\dot{\mathbb{H}}(t,\Lambda) = \mathbb{G}(t,\Lambda)\mathbb{H}(t,\Lambda) + \mathbb{F}(t,\Lambda) \quad \text{------}\ (15)$$

$$\mathbb{G}(t,\Lambda) = \mathbb{G}_0(t) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \mathbb{G}_i(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\lambda_i\lambda_j\cdot\mathbb{G}_{ij}(t) \quad \text{----}\ (16)$$

$$\mathbb{F}(t,\Lambda) = \mathbb{F}_0(t) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \mathbb{F}_i(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\lambda_i\lambda_j\cdot\mathbb{F}_{ij}(t) \quad \text{----}\ (17)$$

(16)，(17)式を(15)式に代入し，両辺に Λ による平均操作を行うと次式を得る。

$$\langle \dot{\mathbb{H}}(t,\Lambda)\rangle = \mathbb{G}_0(t)\langle \mathbb{H}(t,\Lambda)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\mathbb{G}_i(t)\langle\lambda_i \mathbb{H}(t,\Lambda)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\mathbb{G}_{ij}(t)\langle\lambda_i\lambda_j \mathbb{H}(t,\Lambda)\rangle + \mathbb{F}_0(t) + \sum_{i=1}^{n}\langle\lambda_i\rangle\mathbb{F}_i(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\langle\lambda_i\lambda_j\rangle\mathbb{F}_{ij}(t) \quad \text{------}\ (18)$$

この式の中には，新しい未知数 $\langle\lambda_i \mathbb{H}(t,\Lambda)\rangle$，$\langle\lambda_i\lambda_j \mathbb{H}(t,\Lambda)\rangle$ が現れる。両辺に λ_R を掛けて平均をとる。

$$\begin{aligned}
\langle\lambda_R \dot{\mathbb{H}}(t,\Lambda)\rangle &= \mathbb{G}_0(t)\langle\lambda_R \mathbb{H}(t,\Lambda)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\mathbb{G}_i(t)\langle\lambda_R\lambda_i \mathbb{H}(t,\Lambda)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\langle\lambda_i\lambda_j\lambda_R \mathbb{H}(t,\Lambda)\rangle\mathbb{G}_{ij}(t) \\
&\quad + \mathbb{F}_0(t)\langle\lambda_R\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle\lambda_i\lambda_j\rangle\mathbb{F}_i(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\langle\lambda_i\lambda_j\lambda_R\rangle\mathbb{F}_{ij}(t) \qquad (R = 1, 2, \cdots n) \quad \text{---}\ (19)
\end{aligned}$$

この式では，さらに $\langle\lambda_i\lambda_j\lambda_R \mathbb{H}(t,\Lambda)\rangle$ が現れ，この連鎖が無限に続く。この種の方程式の近似解法はいくつか提案されているが，本研究では，高次のキュムラントを打切る仮定を設ける。

$$\begin{aligned}
&\mu_i = \langle\lambda_i\rangle \qquad \sigma_{ij}^2 = \langle(\lambda_i - \mu_i)(\lambda_j - \mu_j)\rangle \\
&K_{ijR} = \langle(\lambda_i - \mu_i)(\lambda_j - \mu_j)(\lambda_R - \mu_R)\rangle \\
&\langle\lambda_i\lambda_j \mathbb{H}(t,\Lambda)\rangle = (\sigma_{ij}^2 - \mu_i\mu_j)\langle \mathbb{H}(t,\Lambda)\rangle + \mu_j\langle\lambda_i \mathbb{H}(t,\Lambda)\rangle \\
&\qquad\qquad + \mu_i\langle\lambda_j \mathbb{H}(t,\Lambda)\rangle \\
&\langle\lambda_i\lambda_j\lambda_R \mathbb{H}(t,\Lambda)\rangle = (K_{ijR} - 2\mu_i\mu_j\mu_R)\langle \mathbb{H}(t,\Lambda)\rangle \\
&\quad + (\sigma_{ij}^2 + \mu_i\mu_j)\langle\lambda_R \mathbb{H}(t,\Lambda)\rangle + (\sigma_{iR}^2 + \mu_i\mu_R)\langle\lambda_i \mathbb{H}(t,\Lambda)\rangle \\
&\quad + (\sigma_{Ri}^2 + \mu_R\mu_i)\langle\lambda_j \mathbb{H}(t,\Lambda)\rangle
\end{aligned}$$

5. 数値計算を考察

数値計算の対象は，相関を有する確率過程を外力とする1自由度系である。ここでは1自由度系の質量とばね定数が変動係数 0～0.3 で変動する場合について考えた。確率過程の外力のパワースペクトルは，

$S_z(w) = S_0/\{(w_0 - w^2)^2 + 4\zeta^2 w^2 w_0^2\}$ ---(20) である。

計算結果の1例を図-1と図-2に示した。この計算例は，1自由度系の減衰定数および(20)式の ζ をそれぞれ 0.02 とした場合である。外力は 帯域過程となり，中心周波数 w_0 が1自由度系の固有振動数 w_1 と一致すると共振する。しかし，1自由度系のパラメーターの変動が大きくなると，1自由度系の応答は減少することが予想される。図-1は，この状態を示したものである。図-2は，1自由度系の固有振動数の平均値 $\bar{w}$ が $0.8w_0$ の場合である。変動係数が大きくなると，応答は増大する。なお，非定常応答解析は，講演当日発表する予定である。

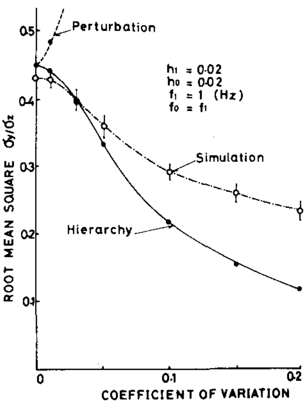

図-1 定常 r.m.s. 応答 ($f_1 = f_0$)

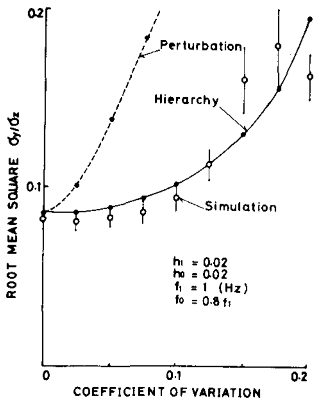

図-2 定常 r.m.s. 応答 ($f_0 = 0.8f_1$)