

東京大学 学生員 池田靖宏
名古屋工業大学 正員 長谷川彰夫
東京大学 正員 西野文雄

最大荷重設計と最小重量設計の比較 現在、構造系の最適設計に関する研究の中心をなしている最小重量設計と、その対偶の関係にあたる最大荷重設計のアルゴリズムならびに数値計算法の比較を行なう。
 n 個の設計事項に対して満足すべき設計とは次の条件で与えられる。^{1),2)}

$$D_j \leq C_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

ここで j は設計の対象となる状態、 D_j は設計関数、 C_j は規定関数を示す。 D_j, C_j は厳密には幾何学量の設計変数 $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 、適用荷重 P の関数であるが、一般の設計問題では³⁾

$$D_j = D_j(P, x) = P A_j(x), \quad C_j = C_j(P, x) = C_j(x) \quad (2)$$

以上より、最小重量設計の定義は次の様に表現できる。

$$\left\{ \begin{array}{l} P A_j(x) \leq C_j(x), \quad (j = 1, n) \text{ 並びに } P = \text{一定の条件のもとに重量 } W(x) \text{ の} \\ \text{設計変数 } x \geq 0 \text{ に関する最小値を求める。} \end{array} \right.$$

ここで、状態能力関数 $P_j(x) = C_j(x)/A_j(x)$, ($j = 1, n$) を定義すると、(1)の n 個の設計事項に関する条件は

$$P \leq P_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

(3)の条件が全ての j について成立することは、次の様に P を定義することと等価である。

$$P = \min (P_j(x)) \quad (4)$$

最大荷重設計の定義は次の様に表現できる。

$$\left\{ W(x) = \text{一定の条件のもとに } P = \min (P_j(x)) \text{ の設計変数 } x \geq 0 \text{ に関する最大値を求める。} \right.$$

この定義は、 $W(x) = \text{一定の条件を用い、} m$ 個の独立変数 x から 1 つの独立変数を消去し、 $m-1$ 個の独立変数 $y = (y_1, \dots, y_{m-1})$ に変換することにより、以下の様に定義し直せる。

$$\left\{ P = \min (P_j(y)) \text{ の設計変数 } y \geq 0 \text{ に関する最大値を求める。} \right. \quad (5)$$

最小重量設計は、非線形の不等式拘束条件のもとに非線形の目的関数を最小化する問題であり、解析には非線形計画法等を用いるのに対し、最大荷重設計は(5)に示される様に、単に非線形関数の最大値を求める問題となり、最小重量設計より解析法が簡単になる、このことが最大荷重設計の一つのメリットである。更に、 $P_j(x) = \frac{C_j(x)}{A_j(x)}$ 中の $A_j(x)$ がマトリックス構造解析と直結した部分であるので、 $P_j(x)$ の値はマトリックス構造解析と直結しており、(5)で定義した最大荷重設計問題がマトリックス構造解析と直接結び付けることができる可能性がある。

最大荷重設計に於る一解析法 (5)の最大値問題を解く手法として、直接探索法・最大傾斜法その他の確立された手法があるが、取り扱い関数(4)の様な特殊な形をしていることを考慮し、以下の方法を考えた。

$P_j(y)$ を y の初期値 $\bar{y}$ の近傍で線形化すると、

$$P_j(y) = \sum_{i=1}^{m-1} a_{ji} y_i + b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

$$\text{ここに、} \quad a_{ji} = \left(\frac{\partial P_j}{\partial y_i} \right)_{y=\bar{y}}, \quad b_j = P_j(\bar{y}) - \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{\partial P_j}{\partial y_i} \right)_{y=\bar{y}} \bar{y}_i \quad (7)$$

(6)を最大荷重設計の定義式(5)へ代入すると、(5)は $y = \bar{y}$ の近傍で以下の様に近似される。

$$\left\{ P = \min \left(\sum_{i=1}^{m-1} a_{ji} y_i + b_j \right) \text{ の設計変数 } y \geq 0 \text{ に関する最大値を求める。} \right. \quad (8)$$

(8)は非自の擬変数 z を導入することにより、以下の様に書き直せる。

$$\left\{ (10), (11) \text{ の拘束条件のもとに、} z \text{ の最大値を求める。} \right. \quad (9)$$

$$\text{ここに、} \quad \sum_{i=1}^{m-1} a_{ji} y_i + b_j - z \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

$$y_i \geq 0 \quad (i=1, m-1), \quad z \geq 0 \quad (11)$$

(9)は線形不等式拘束条件下での最大値問題であり、シンプレックス法を用いることにより簡単に計算できる。ここで求めた y の値を新たに初期値として以上の操作を反復することにより、(5)の最大値問題を解くことができる。但し、この方法は P の最大値がFig. 1の様に、関数群 $P_j(y)$ の交点にある場合(例、構造物がFully Stress Stateにある場合)にのみ有効であり、Fig. 2の様に、 P の最大値が1つの関数 $P_j(y)$ にのみ支配されている場合(例、たわみの制限だけで設計が支配され、他の条件がtrivialとなる場合)には、(10)、(11)の拘束条件の他に次の不等式条件を課し、以上の操作を反復すると共に δ の値を漸次減して行き、 δ の値をゼロに収束させることに

$$|y_i - \bar{y}_i| \leq \delta \quad (12)$$

より、(5)の最大値問題を解くことができる。本解法はマトリックス構造解析とシンプレックス法という、ともに確立された手法を結びつけた手法であり、簡単である点がメリットである。

数値計算例 最適設計はレベル1{最適断面の決定}、レベル2{与えられた構造系の骨組配置のもとでの断面剛性の最適配分}、レベル3{構造系の骨組配置の最適化}と3つのレベルに分けられるが、ここでは、レベル2の最適設計例として、Fig. 3に示されるトラスが節点B、Cに外力 P_1, P_2, P_3, P_4 を受ける場合の最適設計を行ってみた。拘束条件として、部材1~5の圧縮・引張応力が許容応力(座屈は無視した)を越えない条件はらびに、節点B、Cの水平方向と鉛直方向の変位が制限値を越えない条件を課し、重量としては各部材の断面積を $A_1, \dots, A_5$ とする時、 A_i に関する線形式(13)を用いた。

$$W(x) = \sum_{i=1}^5 \alpha_i A_i \quad (13)$$

この様に重量として線形式を用いる場合には、最大荷重設計と最小重量設計は変数変換の関係にばって居り、両設計は数学的に完全に一致することを確かめている。外力 P_1, P_2, P_3, P_4 がある範囲の値を取る場合の最適設計を本解法を用いて解析してみた。 10^{-4} の誤差で解を求める際、解がFig. 1の様に関数群 $P_j(x)$ の交点にある場合には、平均3~4回の反復計算、Fig. 2の様な位置にある場合には平均15~20回の反復計算を必要とした。解がFig. 1ならびにFig. 2の位置にある場合の反復計算の収束の過程を、左右対称($P_1 = -P_3, P_2 = P_4$)の外力を与えた場合についてFig. 4にまとめる。この図より解がFig. 2の位置にある場合には、振動的であり、収束が遅い欠点があるが、この場合には、設計変数 y の値に対し P の最大値の鋭感にはなっており、精度を要とするので、このことは実用上特に問題にはならないと思われる。

- 参考文献 1) Hasegawa A, Hall W. B. and Lind N. C Maximum Load Design of Cold-Formed Steel Channel Beams, ASCE VOL. 104 NO. ST7 JULY 1978.
2) 長谷川彰夫, 最適設計手法としての最大荷重設計, 第33回土木学会年次講演概要集第1部268頁

