I－294　振動数要求を満たす構造物の最適化問題

東京電機大学　理工学部　正　松井　邦人
芝浦工業大学　工学部　正　山本　一之

1．はじめに　構造物を設計する場合には，応力制限，変位制限だけでなく固有振動数に対する配慮も必要な場合がある。本研究は振動数要求を満たす構造物の最適化設計に対する一手法を提案している。

2．解析方法　一般に構造物の最適化問題は次の式で定義できる。

目的関数　$f(z, b, \zeta)$　(1)

拘束条件　$K(b)z = Q$　(2)

$K(b)y = \zeta M(b)y$　(3)

$\phi(z, b, \zeta) \leq 0$　(4)

bは設計変数，zは状態変数と呼ばれており，それぞれ$[b_1, b_2 \cdots b_m]^T \in R^m$，$[z_1, z_2 \cdots z_n]^T \in R^n$で定義されるベクトル量である。また$\zeta$は固有値であり，構造物の固有振動数や座屈荷重に対応するパラメータである。式(2)は微小変位理論における外力と変位の関係を示している。式(3)は構造物の固有値問題であり，yは固有値ζに対応する固有ベクトルである。本研究においては，式(2),(3)とも有限要素法で定式化を行なっている。したがって$K(b)$は剛性マトリックス，$M(b)$は質量マトリックスであり，その大きさは共に$n \times n$である。式(4)は応力制限，変位制限，振動数制限等を表わす拘束条件式で，一般に$\phi = [\phi_1(z, b, \zeta), \phi_2(z, b, \zeta) \cdots \phi_p(z, b, \zeta)]^T \in R^p$と書ける。

式(1)～(4)で定義された最適化問題の解法として，最大傾斜法を用いる。まずそれ等の式で変数z, b, ζがそれぞれ$\delta z, \delta b, \delta \zeta$だけ変化すると，式(1)～(4)は近似的に

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \frac{\partial f}{\partial b}\delta b + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\delta \zeta \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial b}[K(b)z]\delta b + K(b)\delta z = 0 \tag{6}$$

$$K(b)\delta y + \frac{\partial}{\partial b}[K(b)y]\delta b = \delta\zeta M(b)y + \zeta\frac{\partial}{\partial b}[M(b)y]\delta b + \zeta M(b)\delta y \tag{7}$$

$$\delta\phi = \frac{\partial \phi}{\partial z}\delta z + \frac{\partial \phi}{\partial b}\delta b + \frac{\partial \phi}{\partial \zeta}\delta \zeta \tag{8}$$

だけ変化する。

不等号拘束条件式(4)のなかで，b, zがある値$b = b^{(0)}$，$z = z^{(0)}$の時$\phi_j(z^{(0)}, b^{(0)}, \zeta^{(0)}) \geq 0$なら

$$\delta\phi_j \leq \Delta\phi_j \tag{9}$$

とする。但し$\Delta\phi_j$は満たされない不等号拘束条件に対して必要な修正量であり，一般に

$$\Delta\phi_j = -\phi_j(z^{(0)}, b^{(0)}, \zeta^{(0)}) \tag{10}$$

となる。便宜上$\phi_j(z^{(0)}, b^{(0)}, \zeta^{(0)}) \geq 0$となる式の番号$j$のセットをAとする。

$$A = \{j \mid \phi_j[z^{(0)}, b^{(0)}, \zeta^{(0)}] \geq 0\} \tag{11}$$

である。セットAは式(9)を満足する不等号拘束条件式の番号をすべて含んでいる。セットAに含まれる番号に対応する不等号拘束条件の集合を$\tilde{\Phi}$とする。

$$\tilde{\Phi}(z, b, \zeta) = [\phi_j(z, b, \zeta) \mid j \in A] \tag{12}$$

式(12)を用いると式(9)は

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial b}\delta b + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \zeta}\delta \zeta \leq \Delta\tilde{\Phi} \tag{13}$$

となる。但し$\Delta\tilde{\Phi}$は

$$\Delta\tilde{\Phi} = [\Delta\phi_j \mid j \in A] \tag{14}$$

である。もしAが空集合の時，$\tilde{\Phi}$，$\Delta\tilde{\Phi}$は共にゼロとなる。

ここまでの議論は，$\delta z, \delta b, \delta \zeta$が十分に小さいと云う条件のもとに行なって来た。しかし設計者が自由に選べる変数はδbだけであり，$\delta z, \delta \zeta$が十分に小さいという保障はかならずしもないが，構造物の解析では，$K(b), M(b)$が正値で下に有界なマトリックスであるので，δbが小さいと$\delta z, \delta \zeta$も小さくなる。bのノルム$\|\delta b\|$を十分小さく押えるためには，更に不等号拘束条件

$$\delta b^T W \delta b - \xi^2 \leq 0 \tag{15}$$

が必要となる。ξ^2は小さな正のパラメータであり，Wは$m \times m$の重み行列である。一般にWは単位行列にとって良いが，bの要素のオーダが全く異なった物理量の時には，オーダを揃えるようにWを選ぶことが出来る。式(1)～(4)で定義された問題を解くことは，式(6),(7),(13),(15)の拘束条件の下で式(5)を最小化することに帰着する。それらの式はδbだけでなく，$\delta z, \delta \zeta$にも依存しているが，式(6)(7)を用いて式(5)(13)から$\delta z, \delta \zeta$を消去し，設計者が直接左右できる変数δbで表示するのが便利である。

δzを消去するにあたり、新しい変数ベクトルλ^Jと、マトリックス$\lambda^{\tilde{\Phi}}$を導入する。但しそれらの変数は

$$K(b)\lambda^J=\frac{\partial f}{\partial z}^T \quad (16) \qquad K(b)\lambda^{\tilde{\Phi}}=\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z}^T \quad (17)$$

の解である。一般に$K(b)$は対称であるから、式(16) 式(17)の転置行列を取り、右からδzを掛けると

$$\lambda^{J^T}K(b)\delta z=\frac{\partial f}{\partial z}\delta z \quad (18) \qquad \lambda^{\tilde{\Phi}^T}K(b)\delta z=\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z}\delta z \quad (19)$$

となる。式(7)の左からy^Tを掛けて整理すると

$$y^T[K(b)-\zeta M(b)]\delta y+\{y^T\frac{\partial}{\partial b}[K(b)y]-\zeta y^T\frac{\partial}{\partial b}[M(b)y]\}\delta b$$
$$=\delta\zeta y^T M(b)y \quad (20)$$

上式の左辺の第一項は、$K(b)$, $M(b)$が対称であるので、式(3)よりゼロである。またyは$M(b)$に関して正規化すると、

$$y^T M(b)y=I \quad (I:単位行列) \quad (21)$$

式(20)は上式を用いると

$$\delta\zeta=\{y^T\frac{\partial}{\partial b}[K(b)y]-\zeta y^T\frac{\partial}{\partial b}[M(b)y]\}\delta b \quad (22)$$

となる。式(6)(18)(19)(22)を用いて、式(5)(13)よりδz $\delta\zeta$を消去できる。したがって式(1)~(4)からなる最適化問題を解くことは、次式に置き換える事となる。

目的関数(最小化) $\quad \ell^{J^T}\delta b \quad (23)$

拘束条件 $\quad \ell^{\tilde{\Phi}^T}\delta b-\Delta\tilde{\Phi}\leq 0 \quad (24)$

$\qquad \delta b^T W\delta b-\xi^2\leq 0 \quad (25)$

但し

$$\ell^J=\frac{\partial f}{\partial b}^T-\{\frac{\partial}{\partial b}[K(b)z]\}^T\lambda^J$$
$$+\frac{\partial f}{\partial \zeta}[\{\frac{\partial}{\partial b}[K(b)y]\}^T y-\zeta\{\frac{\partial}{\partial b}[M(b)y]\}^T y] \quad (26)$$
$$\ell^{\tilde{\Phi}}=\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial b}^T-\{\frac{\partial}{\partial b}[K(b)z]\}^T\lambda^{\tilde{\Phi}^T}$$
$$+[\{\frac{\partial}{\partial b}[K(b)y]\}^T y-\zeta\{\frac{\partial}{\partial b}[M(b)y]\}^T y]\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \zeta}^T \quad (27)$$

を解くことに帰する。式(23)~(25)で定義される一次近似の最適化問題は、ラグランジアン

$$H=\ell^{J^T}\delta b+\tilde{\mu}^T(\ell^{\tilde{\Phi}^T}\delta b-\Delta\tilde{\Phi})+\nu(\delta b^T W\delta b-\xi^2) \quad (28)$$

で表わすことが出来る。この問題の解はKuhn-Tuckerの必要条件を満足しなくてはならない。

$$\frac{\partial H}{\partial b}=\ell^{J^T}+\tilde{\mu}^T\ell^{\tilde{\Phi}^T}+2\nu\delta b^T W=0 \quad (29)$$
$$\tilde{\mu}^T(\ell^{\tilde{\Phi}^T}\delta b-\Delta\tilde{\Phi})=0 \quad (30)$$
$$\nu(\delta b^T W\delta b-\xi^2)=0 \quad (31)$$
$$\tilde{\mu}\geq 0, \quad \nu\geq 0 \quad (32)$$

式(29)をδbについて解くと

$$\delta b=-\frac{1}{2\nu}W^{-1}(\ell^J+\ell^{\tilde{\Phi}}\tilde{\mu}) \quad (33)$$

となる。式(30)で$\tilde{\mu}\geq 0$と仮定すると

$$\ell^{\tilde{\Phi}^T}\delta b-\Delta\tilde{\Phi}=0 \quad (34)$$

式(33)を式(34)に代入して整理すると

$$\ell^{\tilde{\Phi}^T}W^{-1}\ell^{\tilde{\Phi}}\tilde{\mu}=-\ell^{\tilde{\Phi}^T}W^{-1}\ell^J-2\nu\Delta\tilde{\Phi} \quad (35)$$

となる。今

$$\tilde{\mu}=\tilde{\mu}_1+2\nu\tilde{\mu}_2 \quad (36)$$

と置くと、式(35)を用いて$\tilde{\mu}_1$ $\tilde{\mu}_2$は

$$\ell^{\tilde{\Phi}^T}W^{-1}\ell^{\tilde{\Phi}}\tilde{\mu}_1=-\ell^{\tilde{\Phi}^T}W^{-1}\ell^J \quad (37)$$
$$\ell^{\tilde{\Phi}^T}W^{-1}\ell^{\tilde{\Phi}}\tilde{\mu}_2=-\Delta\tilde{\Phi} \quad (38)$$

を解くことにより求まる。$\tilde{\mu}_1$ $\tilde{\mu}_2$が既知として式(36)を式(33)に代入すると

$$\delta b=-\frac{1}{2\nu}W^{-1}\{\ell^J+\ell^{\tilde{\Phi}}(\tilde{\mu}_1+2\nu\tilde{\mu}_2)\}=-\frac{1}{2\nu}\delta b_1+\delta b_2 \quad (39)$$

但し $\quad \delta b_1=-W^{-1}\{\ell^J+\ell^{\tilde{\Phi}}\tilde{\mu}_1\} \quad (40)$

$\qquad \delta b_2=-W^{-1}\ell^{\tilde{\Phi}}\tilde{\mu}_2 \quad (41)$

式(40)(41)の形式では不明確ではあるが、δb_1は式(1)の勾配を拘束条件の形成する領域に投影したものであり、δb_2は拘束条件を満たす方向に作用するベクトルである。この事実は、δb_1 δb_2が

$$\delta b_2^T W\delta b_1=0 \quad (42) \qquad \ell^{\tilde{\Phi}^T}\delta b_1=0 \quad (43)$$
$$\ell^{\tilde{\Phi}^T}\delta b_2=\Delta\tilde{\Phi} \quad (44) \qquad -\ell^{J^T}\delta b_1\leq 0 \quad (45)$$

を満足することからも推測がつく。

3、最適化のアルゴリズム　解析方法で述べた手法をまとめると次のようになる。

Step 1. 初期値$b^{(0)}$を選定する。

Step 2. 式(2)(3)を解き、z, y, ζを求める。

Step 3. 式(4)を計算し、式(12)で示された$\tilde{\Phi}$を作る

Step 4. 式(16)(17)をλ^J $\lambda^{\tilde{\Phi}}$について解く

Step 5. 式(26)(27)よりℓ^J $\ell^{\tilde{\Phi}}$を計算する

Step 6. $\Delta\tilde{\Phi}$を選ぶ。一般に$\Delta\tilde{\Phi}=-\tilde{\Phi}$とする。

Step 7. 式(37)(38)より$\tilde{\mu}_1$ $\tilde{\mu}_2$を計算する。次に$\nu>0$を選び、式(36)より$\tilde{\mu}$を計算する。$\tilde{\mu}$の要素の中で負になるものがあれば、式(11)のセットAから取り除き、新しく$\tilde{\Phi}$を作成しなおしStep 4に戻る。

Step 8. 式(40)(41)よりδb_1 δb_2を計算する。更に式(39)よりδbを求める。

Step 9. $b^{(i+1)}=b^{(i)}+\delta b$の計算をする。

Step 10. $\|\delta b\|$, $|f^{(i+1)}-f^{(i)}|$が充分に小さく、かつ全ての拘束条件を満足している時には、イテレーションを打ち切る。そうでない時にはStep 2に戻る。

上記のアルゴリズムを用いて得られる、振動数要求を満たす構造物の最適化問題の結果は、当日会場にて発表する。