

大阪大学大学院 学生員 〇坂本 良文
愛媛大学工学部 正 員 大久保 禎二

1. まえがき

大規模構造システムで特に剛性制限が支配的となる最適設計問題を解く場合、数値計画法に基づく解法では、論理的な厳密性および汎用性を有するが、最適解を決定する過程で多くの計算量を必要とし、また、解の振動を生じ非能率的となることが多い。このような困難を克服するための一つのアプローチとして最適規準に基づく envelope 法が提案されている。この方法は剛性制限、応力制限、寸法制限など種々の性質の制約条件をそれぞれ独立に考慮して最適規準を導入し、これらの最適規準から得られる各設計変数の最大値を包括して最適解を決定する方法であり、効率のよい実用的な設計法であるが、その最適性を理論的に明確に証明し得ない欠点を有している。そこでこのような大規模構造物の最適設計問題に関して、ラグランジュ乗数法を用いて設計問題の双対問題を作成し、これを双対変数に関して解くことにより、理論的厳密性を保持しつつ計算手法としては最適規準法程度の効率を期待する Dual Approach が提案されている^(1,2)。本研究はこの Dual Approach について基礎的考察を行なったものである。

2. 理論の概要

いま、部材数 M を有するトラス構造物を、各部材断面の最小寸法、許容応力度および D 個の節点変位に関する制約条件のもとに部材断面積 A を設計変数として最小重量設計を行なうものとする、最適設計問題は次のように定式化される。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{To Find} & A = \{A_1, \dots, A_i, \dots, A_M\} \\ \text{Minimize} & W = \sum_{i=1}^M L_i A_i \\ \text{Subject to} & g_d \equiv \sum_{i=1}^M \left(\left(\frac{FF}{E\delta_a} \right)_{d_i} \cdot \frac{L_i}{A_i} \right) - 1 \leq 0 \quad ; \quad d = 1, \dots, D \\ & g_{ori} \equiv \frac{\bar{A}_i}{A_i} - 1 \leq 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, M \\ & \text{ただし、} \bar{A}_i = \max_{\substack{\text{all } i}} \langle A_{i \min}, \frac{F_i}{\sigma_{ai}} \rangle ; \quad i = 1, \dots, M \end{array} \right\} \quad (1)$$

ここに、 L : 部材長、 A : 断面積、 F : 部材力、 δ_a : 変位の許容量、 σ_a : 許容応力度、 $A_{i \min}$: 最小断面積

(1) の最適問題に対する双対問題は、ラグランジュ関数 $L(A, \mu) = W + \sum_{d=1}^D \mu_d g_d + \sum_{i=1}^M \mu_{ori} g_{ori}$ が停留条件として鞍点を有することを利用し、双対変数に関して次のように定式化される。ただし、 $\lambda_d = \mu_d / W^*$; $d = 1, \dots, D+M$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{To Find} & \lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_d, \lambda_{d+1}, \dots, \lambda_{D+M}\} \\ \text{Maximize} & V = \sum_{d=1}^M L_i \left\{ \sum_{d=1}^D \left(\frac{FF}{E\delta_a} \right)_{d_i} \cdot \lambda_d + \frac{\bar{A}_i}{L_i} \cdot \lambda_{D+i} \right\}^{1/2} \\ \text{Subject to} & \sum_{d=1}^{D+M} \lambda_d = 1, \quad \lambda_d \geq 0 \quad ; \quad d = 1, \dots, D+M \end{array} \right\} \quad (2)$$

主問題(1)の A 空間における解と双対問題(2)の λ 空間における解は、最適点で一致し次の関係がある。

$$\left. \begin{array}{ll} W^* \equiv V^{**} \\ A_i^* \equiv V^* \cdot \left\{ \sum_{d=1}^D \left(\frac{FF}{E\delta_a} \right)_{d_i} \cdot \lambda_d^* + \frac{\bar{A}_i}{L_i} \cdot \lambda_{D+i}^* \right\}^{1/2} \quad ; \quad i = 1, \dots, M \end{array} \right\} \quad (3) \quad \left(\text{ここに } * \text{ は最適値であることを表す。} \right)$$

両問題を比較すると、双対問題では制約条件式が1個のみで大巾に減少しているが、設計変数が主問題の A_i ; $i = 1, \dots, M$ に対し λ_i ; $i = 1, \dots, D+M$ と D 次元多くなっている。しかし変位制約条件が1個のみの最適問題では、次のようにして部材寸法制限に対する双対変数をくり返し計算により消去することができる。すなわち、1個の変位制約条件に対する双対変数 λ_0 とし、

$$\bar{W}_i = L_i \bar{A}_i, \quad \bar{\delta}_i = \left(\frac{FFL}{E\bar{A}} \right)_i, \quad \bar{W} = \sum_{i=1}^M \bar{W}_i, \quad \bar{\delta} = \sum_{i=1}^M \bar{\delta}_i \quad (4)$$

の諸式を用いて(2)の双対問題を表わすと次のようになる。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{To Find} & \lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_M\} \\ \text{Maximize} & V = \sum_{i=1}^M \sqrt{\bar{W}_i} \left(\frac{\bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_a} \lambda_0 + \lambda_i \right)^{1/2} \end{array} \right\} \quad (5)$$

$$\text{Subject to } \sum_{i=0}^M \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0; \quad i = 0, 1, \dots, M \quad (5)$$

関数 V が最大値を持つための必要条件 $\frac{\partial V}{\partial \lambda_i} = 0; \quad i = 1, \dots, M$ より

$$\lambda_i^* = \frac{\bar{W}_i}{W} \left\{ 1 + \frac{\lambda_0}{\delta a} \left(\bar{\delta} - \delta a - \frac{\bar{W}}{W_i} \bar{\delta}_i \right) \right\}; \quad i = 1, \dots, M \quad (6)$$

を得、この λ_i^* を式 (5) の V に代入することにより、 V は λ_0 のみの関数として次式のごとく表わされる。

$$V = \sqrt{W} \cdot \left\{ 1 + \lambda_0 \left(\frac{\bar{\delta} - \delta a}{\delta a} \right) \right\}^{1/2} \quad (7)$$

もし、 $\bar{\delta} < \delta a$ が成立すれば、部材寸法制限のみを考慮して求めた断面積は変位制約も満足し、 λ_0 は 0 となる。しかし $\bar{\delta} > \delta a$ の時は変位制約条件が最適解の決定に際して active となり、関数 V は λ_0 を可能な限り大きくすることにより最大化される。しかし、 λ_0 は $\lambda_i; i=1 \dots M$ のうちいずれか 1 つを 0 以下にする限界の値を越えてはならない。

ゆえに、 λ_0 の許容される最大値はいずれかの λ_i を丁度 0 にする値であるはずである。すなわち次式より求められる。

$$\lambda_0 = \min_{i=1 \dots M} \left\langle \left(1 - \frac{\bar{\delta}}{\delta a} + \frac{\bar{W}}{W_i} \frac{\bar{\delta}_i}{\delta a} \right)^{-1} \right\rangle \quad (8)$$

上式の λ_0 の値は λ_i のいずれか 1 つを 0 とし、その部材寸法制限は有効に作用しないものとして取り除かれ、1 次元低い次の最適問題が形成される。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} &\text{To Find } \lambda = \{ \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{M-1} \} \\ &\text{Maximize } V = \sum_{i=1}^{M-1} \sqrt{W_i} \cdot \left(\frac{\bar{\delta}_i}{\delta a} \lambda_0 + \lambda_i \right)^{1/2} \\ &\text{Subject to } \sum_{i=0}^{M-1} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0; \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

新しい問題 (9) を問題 (5) と同様の方法で処理し、新たに得られた λ_0 の値が前回の値より大きくなっていくれば、今 1 つの λ_i を除去し、 λ_0 および $\lambda_1 \dots \lambda_{M-2}$ を含む問題を作成する。このようなくり返しを V が最大となるまでくり返すことにより、寸法制限および単一のたわみ制限をも満足する最適解 λ^* および V^* が得られ式 (3) より主問題の A^* および W^* を決定することができる。

3. 計算例および OCM との比較

上記の理論により、図 1 に示す片持ちトラスの最小重量設計を行なった結果および最適規準に基づく envelope 法 (OCM) との結果の比較を表 1 に示す。表 1 において、例えば $\delta a = 1.8 \text{ cm}$ の場合、 V の最大値は 3 回目のくり返しにおいて得られ、この時 $\lambda_i; i=1 \dots 6$ のうち λ_3 のみが 0 となっていない。したがって部材 3 の最適断面積は部材寸法の制約条件より決定され、他の部材は λ^* 、すなわち変位制約条件より決定されている。この最適解は OCM による最適解とはば一致している。また $\lambda_0 = 1, \lambda_i = 0; i=1 \dots M$ の解は、たわみ制限のみを考慮した場合の最適解を示し、OCM による結果とも一致する。種々の δa についても同様の結果を得ている。Dual Approach は OCM に比べ、計算効率、解の精度などが劣り、かつ変位制約条件が複数個の場合の解法の確立など、今後の研究に待つべき問題点も多いが、理論的には明解な解法であり、今後研究されるべき方法の一つであろう。

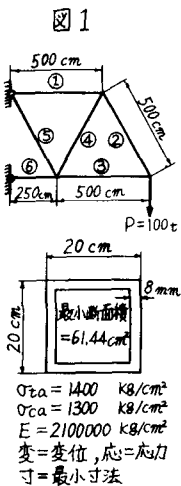


表 1	Dual Approach					OCM				
	$\delta a = 1.80 \text{ cm}$					$\delta a = 1.85 \text{ cm}$				
A_1	86.98	89.90	90.07	92.59	90.25(変)	84.91	87.63	87.78	90.09	87.14(変)
A_2	64.79	62.61	62.29	46.30	61.44(寸)	63.25	61.02	60.71	45.04	61.44(寸)
A_3	93.05	89.90	90.07	92.59	90.25(変)	90.83	87.63	87.78	90.09	88.23(変)
A_4	140.50	135.76	135.10	138.89	135.38(変)	137.16	132.32	131.67	135.13	133.23(変)
V	244518.8	245049.2	245055.8	243058.6	245065.0	238699.2	238845.1	238830.7	236480.2	238852.5
δ	1.813	1.802	1.802	1.800	1.800	1.857	1.847	1.849	1.850	1.850
λ_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
λ_1	0.0768	0.0631	0.0615	0	0	0.0749	0.0615	0.0600	0	0
λ_2	0.0253	0	0	0	0	0.0247	0	0	0	0
λ_3	0.0208	0.0018	0	0	0	0.0203	0.0018	0	0	0
λ_4	0.8872	0.9351	0.9385	1.000	0.8801	0.9367	0.9400	0.9400	1.000	0.8801
	$\delta a = 1.87 \text{ cm}$					$\delta a = 1.90 \text{ cm}$				
A_1	84.11	86.75	86.90	89.13	85.57(変)	82.93	85.47	85.60	87.72	83.33(変)
A_2	62.66	60.41	60.10	44.56	61.44(寸)	61.73	59.50	59.21	43.86	61.44(寸)
A_3	89.98	86.75	86.90	89.13	88.23(変)	88.68	85.47	85.60	87.72	88.23(変)
A_4	135.87	131.00	130.35	133.69	133.23(変)	134.01	129.04	128.41	131.59	133.23(変)
V	236450.6	236450.2	236429.1	233954.1	236497.5	233075.4	232945.5	232972.1	230275.2	233137.5
δ	1.875	1.868	1.867	1.870	1.870	1.901	1.896	1.896	1.900	1.900
λ_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
λ_1	0.0742	0.0608	0.0593	0	0	0.0729	0.0599	0.0585	0	0
λ_2	0.0247	0	0	0	0	0.0241	0	0	0	0
λ_3	0.0202	0.0018	0	0	0	0.0202	0.0017	0	0	0
λ_4	0.8813	0.9374	0.9407	1.000	0.8828	0.9384	0.9415	0.9415	1.000	0.8828

- A.B. Templeman 1) "A Dual Approach to Optimum Truss Design" J. Struct. Mech. 4 (3), 225-255 (1976)
 2) "Optimality Criteria and Dual Methods in Truss Design" IABSE 10th Congress (1976)