I-257 有限層法による地盤の振動解析

電力中央研究所　正員　塩尻弘雄

1．まえがき　近年の高速電子計算機の発達に伴い，解析解を求めることが困難な複雑な形状を有する連続体の動的解析が可能となった。しかし，計算時間と記憶容量の制約から，数値解析の単純な適用が困難な問題も残されている。地盤内の波動伝ぱの問題では，地中構造物等の細部の応力を求めるにはメッシュを細かくとらねばならず，それに伴って時間刻みも細かくとる必要がある。一方解析領域は十分広くとらねば境界からの反射波の影響をうけて正しい結果は得られない。従って通常の方法では膨大な計算時間と記憶容量を必要とする。この対策として波動を完全に吸収し，反射波を出さない境界の工夫が種々なされてきた。その中で，多層地盤を容易に扱える方法として，境界外部の地盤について深さ方向を離散化し，時間領域はフーリエ変換により周波数分解し，波動方程式を水平方向座標に対する常微分方程式に帰着させて解析解を求め，境界内部と接続させる方法がある。Lysmer[1]らは二次元問題に適用し，Kausel[2]らは軸対称構造に適用している。しかし，実在の土木構造物には，道路，トンネル，堤防等一軸方向に長い構造で，荷重が軸方向に変動するものが存在するが，このような問題への適用はなされていない。ここでのべる方法は，そのような構造物と地盤との相互作用を扱うため，荷重と変位を一軸方向にフーリエ変換し，各波数に対して上記の方法を適用し，フーリエ逆変換して最終的な解を得ようとするものである。この場合，境界外部の地盤は，深さ方向のみ離散化され，軸方向は三角関数，他の一方向は常微分方程式の解析解であらわされており，有限層法(Finite Layer Method)の一種と考えられる。

2．解析法

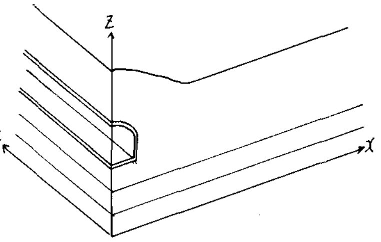

図-1　座　標

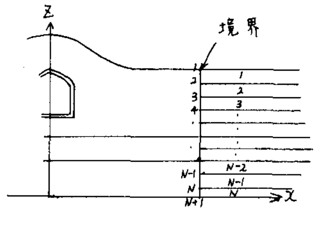

図-2　境界外部の分割

図-1のように，鉛直上方にz座標，軸方向にy座標，それらに垂直にx座標をとる。図-2のように鉛直の境界を考え，外部をN層に分割する。各層内では物性が一定と仮定するとi層内の運動方程式は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial x} + G\Delta u + \rho F_x \\ \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial y} + G\Delta v + \rho F_y \\ \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda+G)\frac{\partial\theta}{\partial z} + G\Delta w + \rho F_z \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ここで，u，v，wはそれぞれx，y，z方向の変位，λ，Gはラーメの定数，ρは密度，F_x，F_y，F_zはx，y，z方向の体積力であり，$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$である。ここで次のようにおく。

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 e^{i(\omega t - ky - ax)} \\ v &= v_0 e^{i(\omega t - ky - ax)} \\ w &= w_0 e^{i(\omega t - ky - ax)} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

さらにu_0，v_0，w_0は各層の境界での値u_0^i，v_0^i，w_0^iから線型に補間できるものとしてガラーキン法に基づいて定式化すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \{\rho\omega^2-(\lambda+2G)a^2+Gk^2\}\mathbb{M}-G\mathbb{B}, & -ak(\lambda+G)\mathbb{M}, & -ia(\lambda\mathbb{A}-G\mathbb{A}^t) \\ -ak(\lambda+G)\mathbb{M}, & \{\rho\omega^2-(\lambda+2G)k^2+Ga^2\}\mathbb{M}-G\mathbb{B}, & -ik(\lambda\mathbb{A}-G\mathbb{A}^t) \\ ia(\lambda\mathbb{A}^t-G\mathbb{A}), & ik(\lambda\mathbb{A}^t-G\mathbb{A}), & \{\rho\omega^2-G(a^2+k^2)\}\mathbb{M}-(\lambda+2G)\mathbb{B} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0^i \\ u_0^{i+1} \\ v_0^i \\ v_0^{i+1} \\ w_0^i \\ w_0^{i+1} \end{pmatrix} = \mathbb{F} \quad \cdots (3)$$

ここで，$2h_i$はi層の厚さ，$\mathbb{F}$は各層間の境界で伝えられる力であり，$\mathbb{A}$，$\mathbb{B}$，$\mathbb{M}$は次のような行列である。

$$\mathbb{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}=\frac{1}{2h_i}\begin{bmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M}=h_i\begin{bmatrix} 2/3, & 1/3 \\ 1/3, & 2/3 \end{bmatrix}$$

ここで変数の変換を行い，次の変数u_0'，v_0'を導入する。

$$\left.\begin{aligned} u_0' &= (a\,u_0 - k\,v_0)\Big/\sqrt{a^2+k^2} \\ v_0' &= (k\,u_0 + a\,v_0)\Big/\sqrt{a^2+k^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{-----------------} \ (4)$$

(3)式を，u_0'，v_0' についての式に変換すると，(3)式の右辺の係数行列は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \rho\omega^2\mathbb{M} - G\mathbb{B} - (\lambda+2G)\alpha^2\mathbb{M}, & \mathbb{O}, & -i\alpha(\lambda\mathbb{A} - G\,\mathbb{A}^t) \\ \mathbb{O}, & \rho\omega^2\mathbb{M} - G\mathbb{B} - \alpha^2 G\mathbb{M}, & \mathbb{O} \\ i\alpha(\lambda\mathbb{A}^t - G\,\mathbb{A}), & \mathbb{O}, & \rho\omega^2\mathbb{M} - (\lambda+2G)\mathbb{B} - \alpha^2 G\mathbb{M} \end{bmatrix} \quad \text{--------} \ (5)$$

ここで$\alpha^2 = a^2 + k^2$である。　上記の係数行列をすべての層について重ね合せればαについての固有値問題となる。αが求まればkを与えたときのaの値が定まる。この固有値問題はLysmerらが二次元問題に対して導いた固有値問題と同一でy方向の波数によらず同じである。各aの値と対応する固有ベクトルのうち，エネルギーを外部に伝えるものか，外部にいくに従って減衰するものを選んで境界における変位と力の関係式を導く。それらの手順はLysmerが述べているのと同一である。

さて，境界の内部については，図-3のような四辺形要素で分割する。要素内の変位をu，v，w，第i節点での変位をu^i，v^i，w^iとし，それぞれ以下のようにおく。

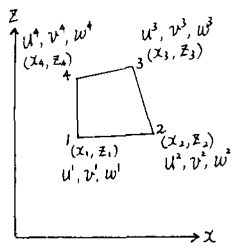

図-3　四辺形要素

$$\left.\begin{aligned} u^i &= u_0^i e^{i(\omega t - ky)}, & u &= u_0 e^{i(\omega t - ky)} \\ v^i &= v_0^i e^{i(\omega t - ky)}, & v &= v_0 e^{i(\omega t - ky)} \\ w^i &= w_0^i e^{i(\omega t - ky)}, & w &= w_0 e^{i(\omega t - ky)} \end{aligned}\right\} \quad \text{---------------} \ (6)$$

u_0^i，v_0^i，w_0^iに対する要素剛性行列$\mathbb{K}_e$と要素質量行列$\mathbb{M}_e$は次のように表せる。

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{K}_e &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbb{B}^t\,\mathbb{H}\,\mathbb{B}\,|\mathbb{J}|\,d\xi\,d\eta \\ \mathbb{M}_e &= \rho\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbb{N}^t\,\mathbb{N}\,|\mathbb{J}|\,d\xi\,d\eta \end{aligned}\right\} \quad \text{---------------} \ (7)$$

ここで，$\mathbb{H}$は三次元応力歪行列であり，$\mathbb{J}$はヤコビアン行列である。また，

$$\left.\begin{aligned} &\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}, & 0, & 0 \\ 0, & -ik, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{\partial}{\partial z} \\ -ik, & \frac{\partial}{\partial x}, & 0 \\ 0, & \frac{\partial}{\partial z}, & -ik \\ \frac{\partial}{\partial z}, & 0, & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} = \begin{bmatrix} \mathbb{N}_s, & \mathbb{O}, & \mathbb{O} \\ \mathbb{O}, & \mathbb{N}_s, & \mathbb{O} \\ \mathbb{O}, & \mathbb{O}, & \mathbb{N}_s \end{bmatrix}, \quad \mathbb{N}_s = \mathrm{diag}\{n_1, n_2, n_3, n_4\}, \\ &n_1 = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad n_2 = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \\ &n_3 = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad n_4 = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned}\right\} \quad \text{---------} \ (8)$$

である。これら剛性行列，質量行列を重ね合せ，前述した境界条件を加え，外荷重の，対応した波数成分に対して解けばu_0^i，v_0^i，w_0^i等が求まる。最終的に変位は次式で求まる。

$$\left.\begin{aligned} u^i &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_0^i e^{i(\omega t + ky)}\,d\omega\,dk \\ v^i &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v_0^i e^{i(\omega t + ky)}\,d\omega\,dk \\ w^i &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_0^i e^{i(\omega t + ky)}\,d\omega\,dk \end{aligned}\right\} \quad \text{-------------------------} \ (9)$$

(9)式の計算，および荷重の波形成分への分解は実際はF.F.T.で行う。計算例については当日とりまとめて行う予定である。

参考文献

1) Lysmer, J. and L.A. Drake ; "A Finite Element Method for Seismology", in Vol. II of Methods of Comp. Physics, Academic Press.

2) Kausel, E. 他 ; "Dynamic Analysis of Circular Footings on Layered Media", J. Eng. Mech. Div. ASCE Vol 101, No EM5, 1975