I-251　応答解析における要素モデルの振動数誤差の考慮

東北工業大学　正会員　秋田宏

連続体を有限要素モデルに置きかえ、逐次積分により応答解析を行う場合、特に応力値に関しては、積分法、質量マトリクス、モデル分割、時間きざみの組み合わせが悪いと大きな誤差をともなうことがある。ここでは、1次元の弾性棒に矩形インパルスが作用した場合を例に、その最適な選択について考察する。

図-1のモデルに対して固有振動数を求め、理論値に対する比で表わすと図-2のようになる。すなわち、高次のモードでは整合マトリクスで20%、集中質量では35%程度の誤差となる。また分割数を11、21、41と増やした場合に、1次と最高次のモードがそれぞれ横軸上で一致するようにプロットすると、上の比は分割数にかかわらず同一の曲線上にのることもわかる。

このように大きな振動数誤差を含むモデルに対し、矩形インパルスのように高次のモードの影響を無視できない荷重を作用させると、当然のことながらその応力値には大きな誤差が出てくる。図-3はモード解析において理論振動数と要素解による振動数を用いた場合の比較である。理論振動数では理論解に対する良い近似となっているが、要素解振動数では不規則な振動をともない誤差の最大は60%にも達する。図-4は、整合質量マトリクスを用いたモード解析において、計算された応力値の誤差の2乗を積算したものである。当然のことながら、21分割や41分割で低次の11モードのみを用いると、近似度が良くなることがわかる。

さて、逐次積分を行う場合正確な積分法を用いると、モード解析で要素解振動数を用いたものと良く一致する結果が得られる。すなわち、より良い近似解を得るため

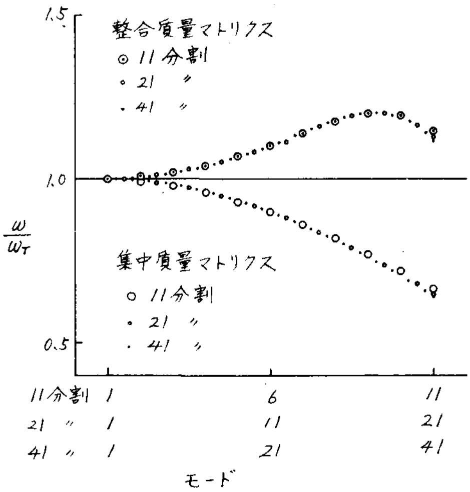


図-2

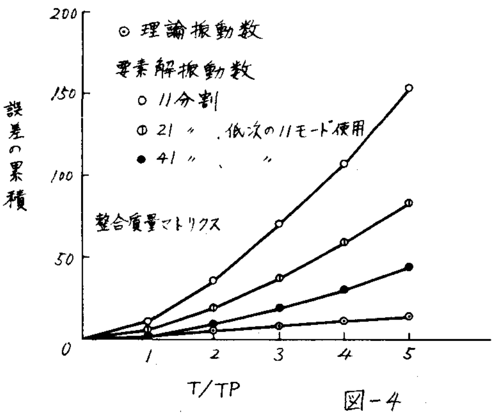


図-4

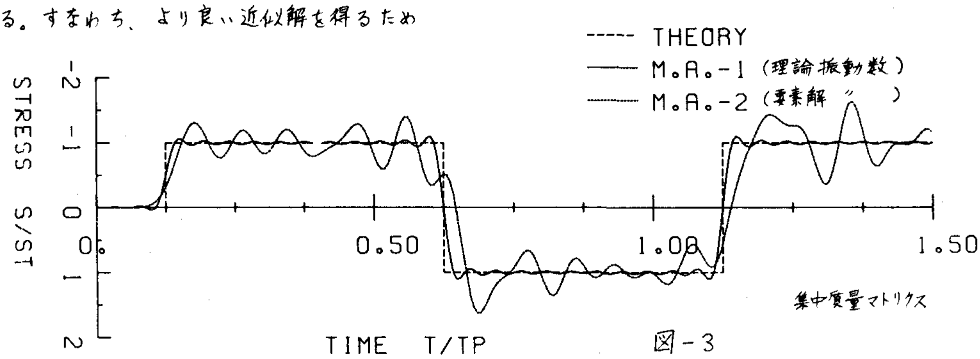


図-3

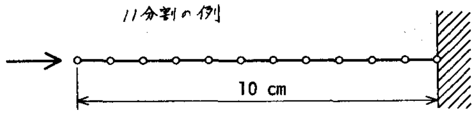
には、あまり正確でない積分法を用いて、積分による誤差と要素モデルの振動数誤差とを相殺させるのが良く、一例としてニューマークのβ法がある。図－５は、β法（$\beta = \frac{1}{4}$）における位相おくれの逆数を、図－２の振動数誤差を良く相殺する、２種の時間きざみに対して示したものである。$\beta = \frac{1}{4}$では、次数が上るに従い位相を進ませることはできないため、集中質量マトリクスは適せず、整合質量マトリクスのみが対象となる。また、初速度に対する振巾を正確にするためには、$\beta = \frac{1}{4}$でなければならず、従って要素モデルの振動数誤差を相殺するための最適な時間きざみが定ってくる。実際に計算を行ってみると、図－６のように時間きざみが理論最小固有周期T_s の $3/10$ の時が最も良い結果を与える。

同様の積分法としてウィルソンのθ法があるが、θ法では位相おくれの計算が簡単ではないため、$\theta = 1.4$ に対し実際に応答を計算してみると図－７のようになる。この範囲で時間きざみは $1/4\,T_s$ が良いことがわかる。β法とθ法を比較すると、θ法が若干良いようであるが、θ法では位相おくれに加えて振巾の減衰もともなうため、積分時間が長くなった場合についてさらに調べる必要がある。

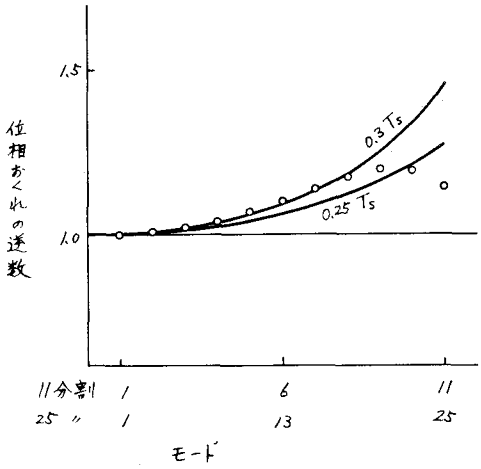
参考文献

1）水田、西山、平井 "Newmarkのβ法における位相遅れ補正の一方法" 土木学会論文報告集 No. 268 P.P. 15－21 1977

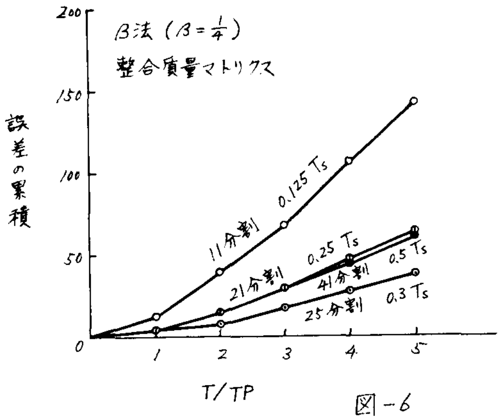
2）藤井、日比野 "Stability of Finite Element Schemes for Vibration Problems of the Equation of Elasticity Theory" 日本鋼構造協会マトリックス構造解析法研究発表論文集 No. 5 P.P. 94－104 1971



図－１



図－５



図－６