

室蘭工業大学 正員 松岡 健一
北海道大学 正員 能町 純雄

1. はじめに 本論文は、弾性定数の異なる円柱と厚肉円筒が同心円状におかれ、この二相同心円柱を柱軸方向に進行する曲げ応力波動を、3次元弾性理論によって解析したものである。著者らは、円柱座標における波動伝播の問題を既に、ハンケル変換を用いる方法で種々解析しており¹⁾、二相同心円柱の問題でも軸対称波動については若干の解析を行なっている²⁾。ここでは、これまでと同様の方法を用い曲げ波動の位相速度および群速度を、円柱と円筒の径の比を変化させて求め、検討を加えた。

2. 波動伝播の基礎方程式 円柱および円筒の波動伝播の基礎方程式は、半径方向に r 、接線方向に θ 、円筒軸方向に z 軸をとった円柱座標の運動方程式から、対象とする波動の進行方向を z 軸方向とし、調和波動を仮定し、半径方向に有限ハンケル変換を適用することにより次のように求められる¹⁾。各座標軸方向の変位をそれぞれ u , v , w とすれば、解析の結果は

$$u = \bar{u}_m \cos m\theta e^{ip(t-z/v)} \quad (1), \quad v = \bar{v}_m \sin m\theta e^{ip(t-z/v)} \quad (2), \quad \bar{u}_m = \bar{A}_{mr} + \bar{B}_{mr} \quad (3), \quad \bar{v}_m = \bar{A}_{mr} - \bar{B}_{mr} \quad (4),$$

$$\bar{A}_{mr} = \sum_{k=1}^{\infty} [\chi_{mp}^{(k)}(Nu_r) \{ \alpha_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} - iNE_{mk}/2 \} / N\mu + (\mu N^2/pp^2) \{ \chi_{mp}^{(k)}(Nu_r)/N\mu - N\alpha_{mp}^{(k)}(Nu_r)/N^2 \} \{ \beta_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} - iNE_{mk} \}] \quad (5),$$

$$\bar{B}_{mr} = \sum_{k=1}^{\infty} [-\chi_{ms}^{(k)}(Nu_r) \{ \alpha_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} + iNE_{mk}/2 \} / N\mu + (\mu N^2/pp^2) \{ \chi_{ms}^{(k)}(Nu_r)/N\mu - N\alpha_{ms}^{(k)}(Nu_r)/N^2 \} \{ \beta_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} - iNE_{mk} \}] \quad (6),$$

$$w = \bar{w}_m \cos m\theta e^{ip(t-z/v)} = \sum_{k=1}^{\infty} [G_m^{(k)}(Nu_r) E_{mk} + (3\mu i N/pp^2) \{ G_m^{(k)}(Nu_r) - G_m^{(k)}(Nu_r) \} \{ \beta_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} - iNE_{mk} \}] \cos m\theta e^{ip(t-z/v)} \quad (7),$$

上式中、 μ , λ は Lamé の弾性定数、 $N = p/v = 2\pi/L = \pi/\ell$, p : 角速度、 v : 波動の z 方向の伝播速度、 L : 波長、 ℓ : 半波長、 ρ : 密度、 $m = 0, 1, \dots$ で円周方向の波動の形状を示し、 $m = 0$ のとき軸対称、 $m = 1$ のとき曲げ波動となる。また式中の関数は、 $N\alpha^2 = N^2 - pp^2/\mu$, $N\alpha^2 = N^2 - pp^2/(3\mu + \lambda)$ として

$$G_m^{(k)}(Nr) = R_{m,m}^{(k)}(Nr)/R_{m,m}(Na_k), \quad \chi_{mp}^{(k)}(Nr) = R_{m+1,m}^{(k)}(Nr)/R_{m,m}(Na_k), \quad \chi_{ms}^{(k)}(Nr) = R_{m-1,m}^{(k)}(Nr)/R_{m,m}(Na_k),$$

であるが、円筒の場合、円筒の外径を a_1 、内径を a_2 , $a_0 = a_2$ として

$$R_{j,m}^{(k)}(Nr) = I_j(Nr) K_m(Na_{k-1}) - (-1)^{j+m} I_m(Na_{k-1}) K_j(Nr), \quad j = m-1, m, m+1, \quad k = 1, 2$$

であり、円柱の場合、 $k = 1$ のみであり、円柱の半径を a として

$$R_{j,m}^{(1)}(Nr) = I_j(Nr), \quad j = m-1, m, m+1$$

となる。ここで I, K は第1種および第2種の変形ベッセル関数であり、 Nu , $N\alpha$ は虚数をとリエるが、このときは関数は、第1種および第2種のベッセル関数 J, Y で与えられる。また、 $\alpha_{mk}, \beta_{mk}, A_{mk}, B_{mk}, E_{mk}$ は、円筒の内外面または、円柱の外面上における応力および変位で与えられる係数であるが、特に A_{mk}, B_{mk} は、

$$A_{mk} = \bar{A}_{mr} r = a_k/a_k = (\bar{u}_m + \bar{v}_m) r = a_k/2a_k \quad (8), \quad B_{mk} = \bar{B}_{mr} r = a_k/a_k = (\bar{u}_m - \bar{v}_m) r = a_k/2a_k \quad (9).$$

3. 境界条件 図-1に示すように、円柱を取りまいて弾性定数の異なる円筒が同心円状に重なられている。この二相同心円柱を伝わる弾性波の速度は、2. で求めた円筒および円柱の解を用いて、これらを組合せて円筒と円柱の境界の境界条件を満足するように導かれた境界条件式からなる固有値方程式の固有値問題として与えられる。いま円筒を表す完全二量に添字1、円柱に添字2で表すものとする。円筒と円柱の境界の条件を考えるに先だて

A_{mk}, B_{mk} は、式(8), (9)を満足しなければならない。

$$1) \quad r = a_1 \text{ における条件: } \quad \text{式(8), (9) から } \quad i) \quad \bar{A}_{mr,1} r = a_1 = a_1 A_{m,1,1} \quad (10), \quad \bar{B}_{mr,1} r = a_1 = a_1 B_{m,1,1} \quad (11),$$

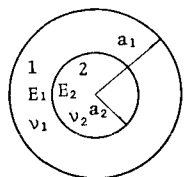


図-1 二相同心円柱

円筒の外面は、応力が存在しないので、

$$ii) \sigma_{r,1})_{r=a_1} = 0,$$

$$\tau_{r\theta,1})_{r=a_1} = 0,$$

$$\therefore \alpha_{m,1} = \beta_{m,1} = 0,$$

$$\tau_{r,z,1})_{r=a_1} = 0 \quad (12),$$

2) $r = a_2$ における条件:

1) と同様に式(8), (9)から

$$iii) \tilde{A}_{m,r,1})_{r=a_2} = a_2 \tilde{A}_{m,z,1}, \quad (13)$$

$$\tilde{A}_{m,r,2})_{r=a_2} = a_2 \tilde{A}_{m,z,2} \quad (14)$$

$$\tilde{B}_{m,r,1})_{r=a_2} = a_2 \tilde{B}_{m,z,1} \quad (15)$$

$$\tilde{B}_{m,r,2})_{r=a_2} = a_2 \tilde{B}_{m,z,2} \quad (16)$$

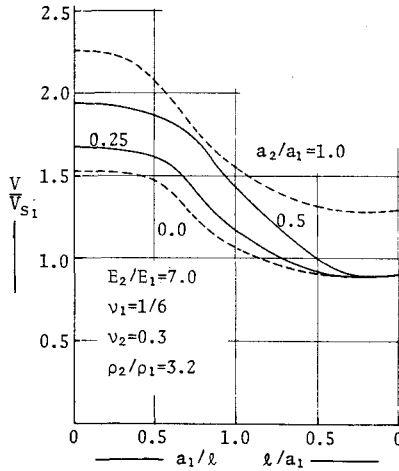


図-2 軸対称波の位相速度分散曲線

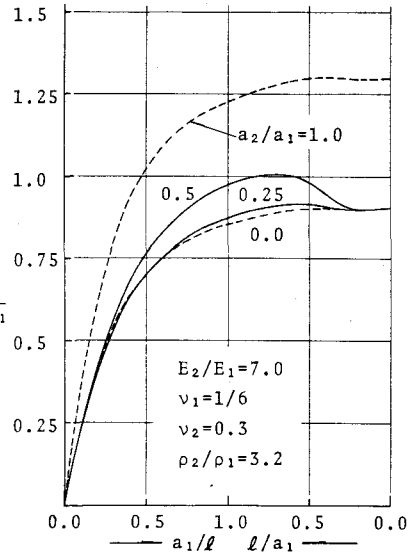


図-3 曲げ波の位相速度分散曲線

円筒と円柱の接触面では変位および応力が連続しているものとすれば、

$$iv) u_1)_{r=a_2} = u_2)_{r=a_2},$$

$$v_1)_{r=a_2} = v_2)_{r=a_2},$$

$$\therefore A_{m,z,1} = A_{m,z,2} \quad (17),$$

$$B_{m,z,1} = B_{m,z,2} \quad (17),$$

$$w_1)_{r=a_2} = w_2)_{r=a_2},$$

$$\therefore E_{m,z,1} = E_{m,z,2} \quad (18),$$

$$\tau_{r,z,1})_{r=a_2} = \tau_{r,z,2})_{r=a_2},$$

$$\therefore \alpha_{m,z,1} = \alpha_{m,z,2} \quad (19),$$

$$\sigma_{r,1})_{r=a_2} = \sigma_{r,2})_{r=a_2},$$

$$\therefore \beta_{m,z,1} = \beta_{m,z,2} \quad (20),$$

および

$$\tau_{r,z,1})_{r=a_2} = \tau_{r,z,2})_{r=a_2} \quad (21)$$

図-4 曲げ波の群速度分散曲線

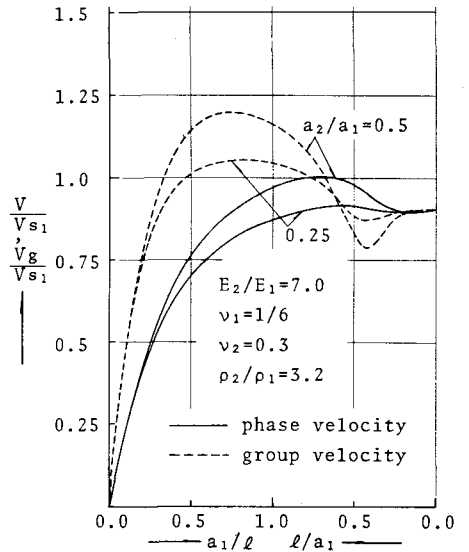


図-5 位相速度と群速度

以上の条件式から P に関する固有値方程式が得られ、これから位相速度 V が求められる。

4. 数値解析 数値解析例としてポアソン比 $\nu_1 = 1/6$, $\nu_2 = 0.3$, 弾性係数比 $E_2/E_1 = 7.0$, 密度比 $\rho_2/\rho_1 = 3.2$, 半径比 $a_2/a_1 = 0.25, 0.5$, に対する曲げ波の位相速度と群速度を求めた。解析結果を図-2~図-6 に示した。図-2 は軸対称波の位相速度であるが、図-3 と比較の上で示した。図中破線は、円筒体と同一材料の円柱 ($a_2/a_1 = 0.0$) と円柱のみ ($a_2/a_1 = 1.0$) の場合を示している。詳しい検討は後述行けうが、位相速度は軸対称波動と比較して、異質円柱の影響が小さいことがわかる。

※参考文献: 1) 松岡, 能町; 土木学会論文報告集, 第258号, p.13, 1977.

2) 松岡, 能町; 土木学会北海道支部論文報告集, 第35号, p.94, 1979.

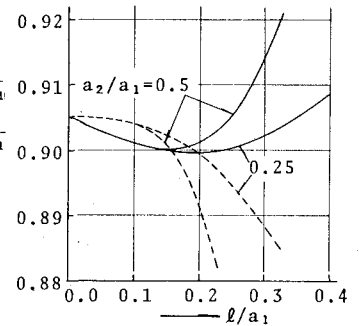


図-6 位相速度と群速度 (波長の長い場合)