

1. 緒言

無限均質等方弾性体中に円孔が存在するとき、平面波による動的応力集中係数の算定をはじめ動的挙動についての研究が行われてきている。とくに P 波の入射による場合は Pao¹⁾ により解析され、一方入射 SH 波については Pao と Mow²⁾ により、入射 SV 波については Mow と Mente³⁾ によりそれぞれ扱われた。これらの研究においては円孔の軸線に対して直角に入射した場合の波動の解析がなされており、円孔周辺において P 波と SV 波の場合直応力 σ_{θ} は最大値をとり、また SH 波の場合せん断応力 $\tau_{\theta z}$ が生じている。しかし SH 波が円孔の軸線を含む平面に平行に進む場合、 45° 方向から入射したとき入射波による直応力 σ_{θ} は最大値をとる。このことに注目し、本研究においては円孔周辺の応力、変位状態について解析を行なった。

2. 波動の変位表示

図1に示すように円柱座標系 (r, θ, z) を使い、円孔の半径を a とする。SH 波が $x-z$ 面と平行に、 z 軸に対して角度 φ の方向から入射した場合を考えよう。

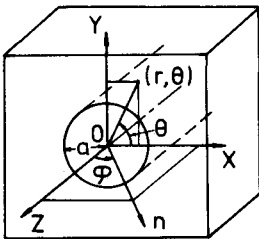


図1. 斜め入射のせん断波を受ける円孔

z 軸となす角度 φ をもって入射する SH 波の変位場は変位ポテンシャル

$$\chi^{(i)} = \chi_0 \exp[i(\beta z + \lambda z - \omega t)] \quad \text{--- (1)}$$

を用いて

$$u = l_1 \nabla \left(\frac{\partial \chi^{(i)}}{\partial z} \right) - l_1 e_3 \nabla^2 \chi^{(i)} \quad \text{--- (2)}$$

と表わされる。ここに χ_0, l_1 : 振幅に関する定数, $\beta = k_2 \sin \varphi, \lambda = k_2 \cos \varphi, k_2$: 波数, ω : 角振動数, e_3 : z 軸方向の単位ベクトル, t : 時間である。次に

$$l_1 \chi_0 k_2^2 \sin \varphi = A \quad \text{--- (3)}$$

とすれば式(2)は振幅 A を有する SH 波を表わす。式(1)を円柱座標系に変換すると次のように書ける。

$$\chi^{(i)} = \chi_0 \exp[i(\lambda z - \omega t)] \sum_{n=0}^{\infty} E_n i^n J_n(\beta r) \cos n\theta, \quad \left. \begin{aligned} E_n &= \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2, & n=1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (4)}$$

さて散乱 P 波について波数は次のように書ける。

$$\alpha^2 = (\omega/c_1)^2 - \lambda^2 = k_1^2 \{ (c_2/c_1)^2 - \cos^2 \varphi \} \quad \text{--- (5)}$$

ここに c_1, c_2 はそれぞれ P 波, S 波の速度である。 $c_1/c_2 = \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}$ であり特に $\varphi = 45^\circ$ の場合、ポアソン比が $0 < \nu < 0.5$ に対して $\alpha^2 < 0$ とする。それゆえ第1種の Hankel 関数 $H_n^{(1)}(\alpha r)$ について $\alpha = i\beta$ とおきかえ、

$K_n(\beta r)$ を第1種の変形された Bessel 関数とし $H_n^{(1)}(i\beta r) = (2/\pi) \exp[-(n+1)\pi i/2] K_n(\beta r)$ である。

に注意すると散乱 P 波として次のポテンシャル

$$\phi^{(d)} = \exp[i(\lambda z - \omega t)] \sum_{n=0}^{\infty} B_n (2/\pi) \times \exp[-(n+1)\pi i/2] K_n(\beta r) \cos n\theta \quad \text{--- (7)}$$

を用いることになる。また散乱 S 波については次のポテンシャル

$$\psi^{(d)} = \exp[i(\lambda z - \omega t)] \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(\beta r) \sin n\theta \quad \text{--- (8)}$$

$$\chi^{(d)} = \exp[i(\lambda z - \omega t)] \sum_{n=0}^{\infty} D_n H_n^{(1)}(\beta r) \cos n\theta \quad \text{--- (9)}$$

を用いる。式(7), (8), (9)を用いて散乱波による変位場は次のように書ける。

$$u = \nabla \phi^{(d)} + \nabla \chi^{(d)} e_3 + l_2 \nabla (\partial \chi^{(d)} / \partial z) - l_2 e_3 \nabla^2 \chi^{(d)} \quad \text{--- (10)}$$

ここに $k_2 = 1/(k_1^2 \sin \varphi)$ である。

3. 境界条件

この問題における境界条件は次のように着ける。すなわち $r=a$ において

$$\tau_{rz} = 0, \quad \text{--- (11)}$$

$$\tau_{r\theta} = 0, \quad \text{--- (12)}$$

$$\sigma_r = 0, \quad \text{--- (13)}$$

となる。変位ポテンシャル式(4),(7),(8),(9)及び変位表示式(2)と(10)を用い、変位と応力の関係式より応力の表示式を求め、式(11),(12),(13)に代入すると未定係数 B_n, C_n, D_n に関する次のような連立方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{(\beta^2 - \lambda^2)}{k_2^2 \sin \varphi} \varepsilon_n i^n \left\{ \frac{n}{a} J_n(\beta a) - \beta J_{n+1}(\beta a) \right\} A + \frac{4}{\pi} i \lambda e^{-\frac{n+1}{2} \pi i} \\ & \times \left\{ \frac{n}{a} K_n(3a) - 3 K_{n+1}(3a) \right\} B_n + i \frac{\lambda n}{a} H_n^{(1)}(\beta a) C_n \\ & + \frac{(\beta^2 - \lambda^2)}{k_2^2 \sin \varphi} \left\{ \frac{n}{a} H_n^{(1)}(\beta a) - \beta H_{n+1}^{(1)}(\beta a) \right\} D_n = 0, \quad \text{--- (14)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2n \varepsilon_n i^{n+1} \cot \varphi}{k_2 a} \left\{ \frac{1-n}{a} J_n(\beta a) + \beta J_{n+1}(\beta a) \right\} A + \frac{4n}{\pi a} e^{-\frac{n+1}{2} \pi i} \\ & \times \left\{ \frac{1-n}{a} K_n(3a) + 3 K_{n+1}(3a) \right\} B_n + \left\{ \beta^2 - \frac{2n(n-1)}{a^2} \right\} H_n^{(1)}(\beta a) \\ & - \frac{2\beta}{a} H_{n+1}^{(1)}(\beta a) C_n + \frac{2n i \cot \varphi}{k_2 a} \left\{ \frac{1-n}{a} H_n^{(1)}(\beta a) + \beta H_{n+1}^{(1)}(\beta a) \right\} D_n = 0, \quad \text{--- (15)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_n i^{n+1} \cot \varphi}{k_2} \left\{ \left(\frac{n(n-1)}{a^2} - \beta^2 \right) J_n(\beta a) + \frac{\beta}{a} J_{n+1}(\beta a) \right\} A + \frac{2}{\pi} e^{-\frac{n+1}{2} \pi i} \\ & \times \left\{ \left(\frac{1}{1-2\nu} \right) ((1-\nu)\beta^2 - \nu\lambda^2) + \frac{n(n-1)}{a^2} \right\} K_n(3a) + \frac{3}{a} K_{n+1}(3a) B_n \\ & + \frac{n}{a} \left\{ \frac{n-1}{a} H_n^{(1)}(\beta a) - \beta H_{n+1}^{(1)}(\beta a) \right\} C_n \\ & + \frac{i \cot \varphi}{k_2} \left\{ \left(\frac{n(n-1)}{a^2} - \beta^2 \right) H_n^{(1)}(\beta a) + \frac{\beta}{a} H_{n+1}^{(1)}(\beta a) \right\} D_n = 0. \quad \text{--- (16)} \end{aligned}$$

4. 数値計算

$\varphi = 45^\circ$ の場合について計算した。数値は有効数字三桁をもつように n を 10 項まで用いた。動的応力集中係数は $r=a$ において $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta / (\mu k_2 A)$, μ はせん断弾性係数

と定義される。図2はポアソン比を変位させた場合の σ_θ^* の実部、虚部を表わしている。波数が 0.4 付近において $\text{Im}(\sigma_\theta^*)$ の絶対値は最大値をとり、動的応力集中係数は静的のそれに比べ 9% 程度大きい値をとる。

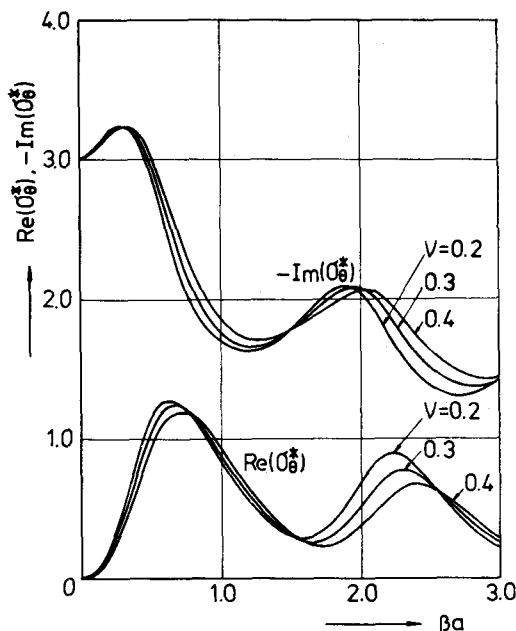


図2. 動的応力集中係数と波数の関係 ($\theta = \pi/2$)

5. あとがき

今回の結果は素張トンネルに対応していると思われるが、さらに覆工を施したトンネルについても検討してゆきたいと思う。

参考文献

- 1) Pao, Y. H.: Dynamical stress concentration in an elastic plate. *J. Appl. Mech.* 29, 299, 1962.
- 2) Pao, Y. H., and Mow, C. C.: "Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations." Crane, Russak, and Co., New York. 113, 1973.
- 3) Mow, C. C. and Mente, L. J.: Dynamic stresses and displacements around cylindrical discontinuities due to plane harmonic shear waves. *J. Appl. Mech.* 30, 598, 1963