

北海道大学工学部	正員	林 川 俊 郎
北海道大学工学部	正員	渡 辺 昇
本州四国連絡橋公団	正員	大 島 久

1. まえがき

吊橋は他の橋梁形式とくらべて比較的剛性が低いので、振動による影響が問題になることが多い。そこで、風荷重、地震力および走行荷重などによる動力学的な影響を調べるために、吊橋の固有振動数を決定することは重要な問題である。図-1(a)のような多径間連続吊橋の固有振動数およびこれに対応する固有振動モードを計算する方法としては、(1)微分方程式法¹⁾、(2)積分方程式法²⁾、(3)エネルギー法^{2),3)}、(4)有限個の質点系で近似する方法⁴⁾などがある。本報告

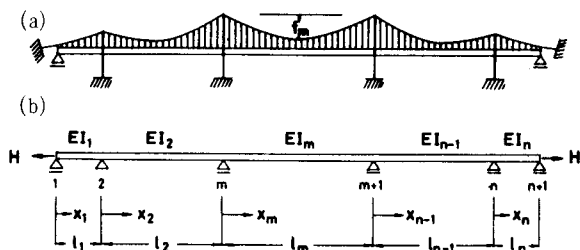


図-1 多径間連続吊橋と補剛桁

は(1)の方法を用いて、つまり、線形化撓度理論に基づく鉛直たわみ振動の基礎微分方程式の一般解を用いて、電子計算機に適した解析法として利用されている「剛性マトリックス法」および「伝達マトリックス法」と全く同様の手法によって、吊橋の固有振動数を合理的に決定する解析法について論ずる。

2. 解析法の概要

撓度理論に基づいて、無限小要素に働く内力と、外力である慣性力との釣り合いを表わした吊橋の鉛直たわみ振動の基礎微分方程式は、着目した径間において補剛桁の曲げ剛性 EI 、質量 m を一定として、

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} - (H_g + H_p(t)) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + m \omega^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = H_p(t) \cdot y'' \quad \dots \dots \dots (1)$$

により与えられる。ここに、 $v(x,t)$ =補剛桁のたわみ、 $H_g, H_p(t)$ =ケーブルの水平張力、 ω =固有円振動数、 $y'' = -8f/l^2$ 、 f =ケーブルの垂下曲線のサグ長、 l =径間長、 $(\cdot)' = \partial/\partial x$ 、 $(\cdot)^* = \partial/\partial t$ 。また、吊橋の塔頂がローラー結合とした場合のケーブルの方程式は

$$H_p(t) \cdot L_k / (E_k F_k) + y'' \int_0^L v(x,t) dx = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

である。ここに、 L_k, E_k, F_k =ケーブルの長さ、弾性係数、断面積、 L =全径間長。式(1)には非線形項が含まれており、正確な解は非常に困難である。通常、慣性力による水平張力 $H_p(t)$ は死荷重による水平張力 H_g に比較して小さいと考えられるので、ここでは $H_p(t) \approx 0$ ($H=H_g$)とした次の一般解を用いる。

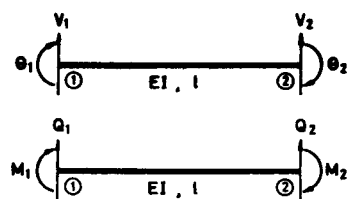
$$V(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x + C \cosh \nu x + D \sinh \nu x \quad \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 $v(x,t) = V(x)e^{i\omega t}$ 、 $\mu = \sqrt{H(Z-1)/2EI}$ 、 $\nu = \sqrt{H(Z+1)/2EI}$ 、 $Z = \sqrt{1 + 4mEI \cdot \omega^2 / H^2} > 1$ 。

式(3)は図-1(a)の多径間連続吊橋を図-1(b)のように、等価な力学系に置換した場合の水平張力 H を受ける多径間連続桁の固有モードに対応している。また、式中の無次元量 Z および積分定数 A, B, C, D は境界条件によって決定される。本報告では、この Z および A, B, C, D を計算するために、以下に示すような「剛性マトリックスによる解法」および「伝達マトリックスによる解法」について述べる。

2-1. 剛性マトリックスによる解法

任意の着目点 x における変位 $V(x)$ 、 $\theta(x) = V'(x)$ と断面力 $M(x) = -EI V''(x)$ 、 $Q(x) = -EI V'''(x) + H V'(x)$ を用いて、 $x=0$ および $x=l$ における変位、断面力を積分定数でマトリックス表示し、図-2におけるような符号に変換すると、次式の剛性マトリックスを得る。図-2 剛性マトリックスの符号



$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & & k_{33} & k_{34} \\ \text{Sym.} & & & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_{11} &= G(\mu^2 + \nu^2)(\nu \cos \mu l \sinh \nu l + \mu \sin \mu l \cosh \nu l), \\ k_{12} &= G((\nu^2 - \mu^2)(1 - \cos \mu l \cosh \nu l) - 2\mu\nu \sin \mu l \sinh \nu l), \\ k_{13} &= -G(\mu^2 + \nu^2)(\mu \sin \mu l + \nu \sinh \nu l), \\ k_{14} &= G(\mu^2 + \nu^2)(\cos \mu l - \cosh \nu l), \\ k_{22} &= G(\mu^2 + \nu^2)(\sin \mu l \cosh \nu l / \mu - \cos \mu l \sinh \nu l / \nu), \\ k_{24} &= -G(\mu^2 + \nu^2)(\sin \mu l / \mu - \sinh \nu l / \nu), \\ k_{23} &= -k_{14}, \quad k_{33} = k_{11}, \quad k_{34} = -k_{12}, \quad k_{44} = k_{22}, \end{aligned}$$

ただし、 $G = EI / (2(1 - \cos \mu l \cosh \nu l) + (\nu^2 - \mu^2) \sin \mu l \sinh \nu l / (\mu \nu))$ (4)

上式(4)を用いて、各径間における剛性マトリックスを重ね合わせることで、構造全体の剛性方程式 $F = KU$ を得る。さらに、拘束節点処理を行なうことにより、 $\det |K| = 0$ なる振動数方程式が得られる。これは Z に関する超越方程式となるが、Regula-Falsi 法により比較的容易に、かつ精度のよい解を求めることができる。また、個々の固有値 Z に対応して固有振動モードが相対量として求められるが、ここでは紙面の都合上その詳細については省略する。

2-2. 伝達マトリックスによる解法

任意の着目点 x における変位 $V(x)$, $\theta(x) = -V'(x)$ と断面力 $M(x) = EI V''(x)$, $Q(x) = EI V'''(x) - H V'(x)$ を用いて、積分定数を $x=0$ における状態量ベクトル V_i^L で表わし、 $x=l$ における状態量ベクトル V_i^R と関係づけることにより、次の格間伝達マトリックス F_i を得る。 図-3 伝達マトリックスの符号

$$\begin{bmatrix} V \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & -C_2 & -S_3 \\ S_2 & C'_1 & -S'_1 & C_2 \\ -C'_2 & S'_2 & C'_1 & S_1 \\ S_3 & C'_2 & -S_2 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_i^L$$

$$\begin{aligned} C_1 &= T(\nu^2 \cos \mu l + \mu^2 \cosh \nu l), \quad \text{ただし、} \\ C'_1 &= T(\mu^2 \cos \mu l + \nu^2 \cosh \nu l), \quad T = 1/(\mu^2 + \nu^2) \\ C_2 &= T/EI (\cos \mu l - \cosh \nu l), \\ C'_2 &= T/EI \mu^2 \nu^2 (\cos \mu l - \cosh \nu l), \\ S_1 &= T(\mu \sin \mu l + \nu \sinh \nu l), \\ S'_1 &= T/EI (\mu \sin \mu l + \nu \sinh \nu l), \\ S_2 &= T \mu \nu (\nu \sin \mu l - \mu \sinh \nu l), \quad S_3 = T/EI (\sin \mu l / \mu - \sinh \nu l / \nu), \\ S'_2 &= T/EI (\mu^3 \sin \mu l - \nu^3 \sinh \nu l), \quad S'_3 = T/EI \mu \nu (\nu^3 \sin \mu l + \mu^3 \sinh \nu l). \end{aligned}$$

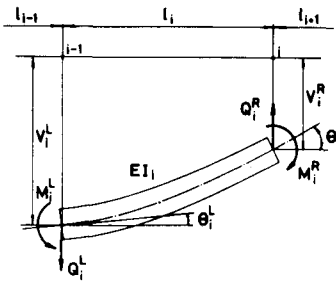
上式(5)を用いて、各支持点の処理を行なうことにより、 $\det |R' F_n \cdots F_2 F_1 R| = 0$ なる振動数方程式を得る。ここに、 R, R' はそれぞれ左端、右端の境界マトリックスである。最終的に、固有振動モード関数 $V(x)$ が決定されると、式(1),(2)より連続吊橋の固有円振動数 ω_s が求められる。

3. 数値計算例と考察

数値計算例として、Köln-Mülheimer 橋について解析を行なった。断面諸元の詳細は参考文献(2)、(3)を参照されたい。計算結果は表-1のとおりである。本解析法は実用上十分な精度を満足しており、式(2)から理解されるように、

逆対称モードに対しては $H_p(t) = 0$ となり厳密解である。また、対称モードの比較的高次の場合には、 $H_p(t)$ による影響は微小となり厳密解に一致する。本計算には北大大型計算機センターを利用した。

(参考文献) 1) 前田幸雄・林正・前田研一：吊橋の固有振動計算法，土木学会論文報告集，第262号，昭52.6, pp.13~24. 2) Moppert, H.: Statische und dynamische Berechnung erdverankerter Hängebrücken mit Hilfe von GREENschen Funktionen und Integralgleichungen, Veröffentlichungen des Deutschen Stahlbau-Verbandes, Heft 9, 1955. 3) Waltking, Fr.-W.: Praktische Berechnung der Eigenfrequenzen von Hängebrücken, Der Bauingenieur 25, Heft 6, 1950. 3) 渡辺昇・佐藤浩一：多径間吊橋の固有振動周期の簡易式について，第10回日本道路会議一般論文集，昭46.10, pp.309~310.



Calculation method	Asymmetric mode			Symmetric mode		
	1 st	2 nd	3 rd	1 st	2 nd	3 rd
Authors	2.7121	1.0057	0.7488	2.5893	1.4675	0.8494
Waltking (ener. meth.)	2.43	0.99	—	2.68	1.40	—
Moppert (ener. meth.)	2.6789	1.0021	—	2.6264	1.4582	—
Moppert (intg. eq. meth.)	2.7114	1.0084	—	—	—	—

表-1 3径間連続吊橋の固有周期 (秒)