

秋田大学土木工学科 学生員 〇 鎧 藤 広
 秋田大学土木工学科 正 員 稼 農 知 徳
 秋田大学土木工学科 正 員 薄 木 征 三

1. まえがき 薄肉曲線けた橋の振動解析に関する研究には、従来直接に運動の基礎微分方程式を解いたものがあったが、著者らはこれまで剛性法を用いていくつか発表してきた。^{1) 2) 3)} 本報告ではさらに発展させ、定式化された基礎方程式の外力項に移動荷重さらに地震荷重を設定して動的応答を求め、剛性法の特徴である多くの未知変位自由度の連成の影響を主に考察することにする。解析方法は移動荷重についてはディラックのデルタ関数で、地震荷重については不規則外力をルンゲ・クッター法による数値積分を用いて、いずれも多自由度の基礎式をモード解析法によって解いた。

2. 考え方・手法

図のように薄肉曲線部材の要素 $i-j$ を考える。

任意点の変位を定義する変位関数は、要素分割数による収束性の良さから軸方向変位 w_0 を含めず

べて3次の多項式とした。³⁾

$$\begin{aligned} u_0 &= a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 \\ v_0 &= b_0 + b_1\theta + b_2\theta^2 + b_3\theta^3 \\ w_0 &= c_0 + c_1\theta + c_2\theta^2 + c_3\theta^3 \\ \varphi_0 &= d_0 + d_1\theta + d_2\theta^2 + d_3\theta^3 \end{aligned} \quad \text{--- (1)}$$

ところで薄肉曲線材の変位に関する定義式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{R} \left(\frac{dw_0}{d\theta} - v_0 \right) & \phi_x &= \frac{1}{R} \left(\frac{dv_0}{d\theta} + w_0 \right) \\ \phi_y &= \frac{1}{R} \frac{du_0}{d\theta} & \psi_z &= \frac{1}{R} \left(\frac{d\varphi_0}{d\theta} - \frac{1}{R} \frac{du_0}{d\theta} \right) \end{aligned} \quad \text{--- (2)}$$

以上の関係を用いて、著者らはすでに薄肉曲線材の剛性マトリックス $[K]$ 質量マトリックス $[M]$ を仮想仕事の原理より誘導し、(文献 1) 2) を参照) 振動の基礎式を次のように定式化した。

$$[K]\{\delta\} + [M]\{\ddot{\delta}\} = \{P\} \quad \text{ここに} \quad \text{--- (3)}$$

$$\{\delta\}^T = [u_i \ v_i \ w_i \ \phi_{xi} \ \phi_{yi} \ \varphi_i \ \psi_{zi} \ \varepsilon_{zi} \ u_j \ v_j \ w_j \ \phi_{xj} \ \phi_{yj} \ \varphi_j \ \psi_{zj} \ \varepsilon_{zj}] \quad \text{節点変位}$$

$$\{P\}^T = [Q_{xi} \ Q_{yi} \ N_{xi} \ M_{xi} \ M_{yi} \ T_{xi} \ M_{wi} \ E_{zi} \ Q_{xj} \ Q_{yj} \ N_{xj} \ M_{xj} \ M_{yj} \ T_{xj} \ M_{wj} \ E_{zj}] \quad \text{節点外力}$$

このように1節点につき変位自由度の数は8となり、これらの連成の影響が考慮されている。

なお連成を無視した、いわゆる非連成の場合には、断面諸量の X 軸まわりおよび Y 軸まわりの断面一次モーメント、さらに相乗モーメントを0と

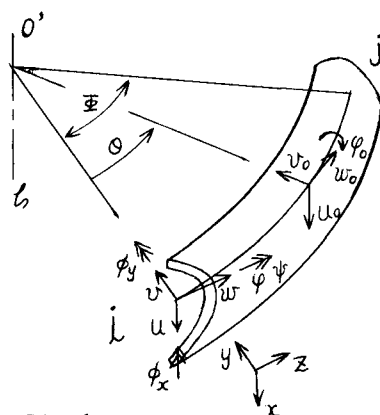


図-1

- u : 鉛直変位
- v : 曲率半径方向変位
- w : 軸方向変位
- ϕ_x : X 軸まわりの接線回転角
- ϕ_y : Y 軸まわりの接線回転角
- φ : Z 軸まわりのねじれ角
- ψ_z : Z 軸まわりのねじれ率
- ε_z : Z 軸方向の垂直ひずみ

すれば曲率面外変位と面内変位は独立し、容易に比較見当することができる。変位応答計算については、まず式 (3) において外力項を 0 とし固有値解析を行なった後、モード解析法に従って計算することにする。その際、式 (3) 中には減衰項は付加されていないが、換算減衰定数 h_s として減衰を考慮することにする。モード解析法における第 s 次の重ね合わせの割合 ψ_s は次のよう

になる

$$\phi_s = \frac{1}{n_s} \int_0^t \dot{p}_s(\tau) \cdot e^{-\lambda_s n_s(t-\tau)} \sin n_s'(t-\tau) d\tau \quad (4)$$

ここに

$$n_s' = n_s \sqrt{1 - \lambda_s^2} \quad t: \text{時間}$$

n_s : 第 s 次の基準振動の固有円振動数

$$\dot{p}_s(\tau) = P_s / M_s$$

$$P_s = \{U_s\}^T \{P\} \quad (\text{換算外力})$$

$$M_s = \{U_s\}^T [M] \{U_s\} \quad (\text{換算質量})$$

$\{U_s\}$: 第 s 次のモード群

各次のモードを重ね合わせて、変位応答 $\{\delta\}$ は求まる。

$$\{\delta\} = [U] \{\psi\} \quad (5)$$

ここに

$$[U] = \begin{bmatrix} U_{11} & \dots & U_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ U_{N1} & \dots & U_{NN} \end{bmatrix} \quad \{\psi\} = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{Bmatrix}$$

(モーダルマトリックス)

ところで外力として本論では、図-2のような一定な大きさ P の移動荷重を対象とし、要素 i, j に荷重が載る場合の等価な節点外力 $\{P\}$ を求めることにする。荷重は図のようにせん断中心より r だけ離れた位置を走行するものとして、せん断中心に鉛直力 F とトルク T の2つの成分に分解される。

$$F = P \quad T = r \cdot P \quad (6)$$

座標 θ の任意断面における鉛直変位、ねじれ角は節点変位を用いて次のようになる。

$$v(\theta) = N_1 u_i + N_2 \phi_{yi} + N_3 u_j + N_4 \phi_{yj}$$

$$\varphi(\theta) = N_1 \phi_i + N_2 \psi_{zi} + \frac{N_2}{R} \phi_{yi} + N_3 \phi_j + N_4 \psi_{zj} + \frac{N_4}{R} \phi_{yj}$$

ここに

$$N_1 = 1 - \frac{3\theta^2}{\bar{x}^2} + \frac{2\theta^3}{\bar{x}^3} \quad N_2 = R(\theta - \frac{2\theta^2}{\bar{x}} + \frac{\theta^3}{\bar{x}^2})$$

$$N_3 = \frac{3\theta^2}{\bar{x}^2} - \frac{2\theta^3}{\bar{x}^3} \quad N_4 = (-\frac{\theta^2}{\bar{x}} + \frac{\theta^3}{\bar{x}^2})R$$

ゆえに外部仕事の変分 $\delta \pi_o$ は、外荷重を $F(\theta, t)$ および $T(\theta, t)$ として

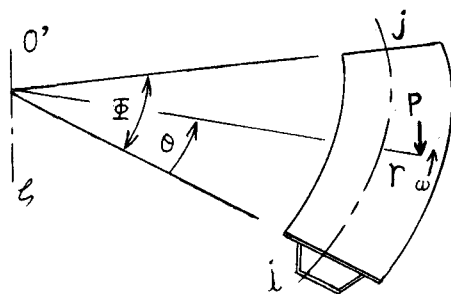


図-2

$\delta \pi_o = \int_0^{\bar{x}} F(\theta, t) \delta v(\theta) d\theta + \int_0^{\bar{x}} T(\theta, t) \delta \varphi(\theta) d\theta \quad (8)$ となり外荷重と等価な節点外力 $\{P\}$ は節点変位ベクトル $\{\delta\}$ より次のように求まる。

$$\{P\} = \frac{\partial \pi_o}{\partial \{\delta\}} \quad (9)$$

角速度 ω なる移動荷重は、ディラックのデルタ関数を用いると

$$F(\theta, t) = P \cdot \delta(\theta - \omega t) \quad T(\theta, t) = T \cdot \delta(\theta - \omega t) \quad (10)$$

デルタ関数の性質と以上の関係から等価節点外力は次のようになる。

$$\begin{aligned} Q_{xi} &= P \left\{ 1 - \frac{3(\omega t)^2}{\bar{x}^2} + \frac{2(\omega t)^3}{\bar{x}^3} \right\} \\ M_{yi} &= (PR + T) \left\{ \omega t - \frac{2(\omega t)^2}{\bar{x}} + \frac{(\omega t)^3}{\bar{x}^2} \right\} \\ T_{zi} &= T \left\{ 1 - \frac{3(\omega t)^2}{\bar{x}^2} + \frac{2(\omega t)^3}{\bar{x}^3} \right\} \\ M_{wi} &= TR \left\{ \omega t - \frac{2(\omega t)^2}{\bar{x}} + \frac{(\omega t)^3}{\bar{x}^2} \right\} \\ Q_{xj} &= P \left\{ \frac{3(\omega t)^2}{\bar{x}^2} - \frac{2(\omega t)^3}{\bar{x}^3} \right\} \\ M_{yj} &= (PR + T) \left\{ -\frac{(\omega t)^2}{\bar{x}} + \frac{(\omega t)^3}{\bar{x}^2} \right\} \\ T_{zj} &= T \left\{ \frac{3(\omega t)^2}{\bar{x}^2} - \frac{2(\omega t)^3}{\bar{x}^3} \right\} \\ M_{wj} &= TR \left\{ -\frac{(\omega t)^2}{\bar{x}} + \frac{(\omega t)^3}{\bar{x}^2} \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

計算は全体マトリックスの中で荷重の位置を要素ごとに行ない、式 (11) を式 (4) に代入して、式 (5) より求める。また地振荷重については、同様な手法で、基盤の加速度による外力項を設定し、不規則外力について有効なルンゲ・クッター法による数値積分を用いた。

3. あとがき 数値計算例については当日 O.H.P. で発表する。なお薄肉部材の要素分割数をおる程度とれば、計算は大容量のマトリックスの固有値演算、逆行列演算等で容量ならびに精度の点で計算不可能となるが、Mass Condensation法を応用すれば小容量の小型計算機でも十分に計算できると思われ、さらに実用的なものとなる。

- 1) 薄肉断面曲線けたの質量マトリックス: 土木学会第32回年次学術講演会 PP 37-38 / 1977
- 2) 薄肉曲線けた橋の質量マトリックス: 昭和52年度東北支部技術研究発表会 PP 6-7 / 1977
- 3) 薄肉曲線けた橋の振動解析: 土木学会第33回年次学術講演会 PP 115 / 1978