I-228　弾性地盤上にある4辺自由板の級数解による振動解析

神戸市　正　○炬口　正　神戸大　正　北村泰寿　正　桜井春輔

1. まえがき　本研究は，4辺自由板の固有振動モードを級数項に用い，半無限弾性体上にある弾性板の振動解析の一方法を述べたものである。基本的な考え方は，筆者らが静的問題に対して示した文献1）の方法を動的問題に拡張したものとなっている。なお，4辺自由板の固有振動モードは Ritz の方法によって求めた。

2. 解析手法　半無限弾性体上の4辺自由板が正弦波外力を受ける場合を解析対象として，級数解の各項に対する係数は次式の汎関数Πを極小にする変分法の原理に基づいて決定する。

$$\Pi=\int_{-d}^{d}\int_{-c}^{c}\Big[\frac{D}{2}\Big\{\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)^2+\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)^2+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2(1-\nu)\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big)^2\Big\}-\frac{1}{2}\rho h\omega^2 w^2+\int_0^{w} g(x,y,\omega;w')\,dw' - p(x,y)\,w\Big]dx\,dy \tag{1}$$

ここで，$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$，Dは板剛度，Eはヤング係数，νはポアソン比，hは板厚，ρは密度，ωは加振円振動数，wはたわみ，$2c$，$2d$は板のx方向，y方向の辺長である。また，$p(x,y)$は分布外力の振幅，$g(x,y,\omega)$はたわみがwのときの地盤反力（本文では，構造物から地盤に働く応力の意味で接触圧とも呼ぶ）で加振円振動数ωに依存している。一方，式(1)の地盤反力$g(x,y,\omega)$は，半無限弾性体に対する混合境界値問題として，次式の未知接触圧に関する第1種 Fredholm 型積分方程式の解となる。

$$\int_{-d}^{d}\int_{-c}^{c} G(x-\xi,y-\eta,\omega)\,g(\xi,\eta,\omega)\,d\xi\,d\eta = w(x,y) \qquad (|x|\leqq c,\ |y|\leqq d) \tag{2}$$

ここで，$G(x-\xi,y-\eta,\omega)$は Green関数である。この$G(x-\xi,y-\eta,\omega)$は座標と加振振動数によって決まるものであるため，$g(\xi,\eta,\omega)$と$w(x,y)$は線形関係で結ばれる。次に，たわみおよび地盤反力を，

$$w(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}A_i\varphi_i(x,y) \tag{3}$$

$$g(x,y,\omega)=\sum_{i=0}^{\infty}A_i f_i(x,y,\omega) \tag{4}$$

のごとく級数展開する。そして，地盤反力とたわみが線形関係であることを考慮して，式(1)を極小にする条件（$\partial\Pi/\partial A_i=0$）を用いる。また，式(2)は係数$A_i$の値にかかわらず恒等的に成立する。これらの条件から，結局，式(1)，(2)はそれぞれ次のように変形することができる。

$$\sum_j A_j\int_{-d}^{d}\int_{-c}^{c}\Big[D\Big\{\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial y^2}+\nu\Big(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2}\Big)+2(1-\nu)\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x\partial y}\Big\}-\rho h\omega^2\varphi_i\varphi_j+\frac{1}{2}(f_i\varphi_j+f_j\varphi_i)\Big]dx\,dy=\int_{-d}^{d}\int_{-c}^{c}p\,\varphi_i\,dx\,dy \qquad (i=0,1,2,\text{-----}) \tag{5}$$

$$\int_{-d}^{d}\int_{-c}^{c} G(x-\xi,y-\eta,\omega)\,f_i(\xi,\eta,\omega)\,d\xi\,d\eta=\varphi_i(x,y) \qquad (i=0,1,2,\text{-----}) \tag{6}$$

ここで，$\varphi_i(x,y)$は4辺自由板のi次の固有振動モード，また$f_i(x,y,\omega)$は$\varphi_i(x,y)$に対する地盤反力を意味する。さらに，$\varphi_i(x,y)$は，両端自由はりの固有振動モードを用いて，次式のように級数展開される。

$$\varphi_i(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}B_{mn}^{(i)}Z_m(x)Z_n(y) \qquad (\text{Ritzの方法}) \tag{7}$$

ここで，$Z_m(x)$，$Z_n(y)$は両端自由はりの固有振動モードであるが，その詳細については省略する。

次に，式(7)を式(6)に代入して$f_i(x,y,\omega)$を求めなければならないが，この式は解析的には解けない。このため，筆者らが剛基礎底面の複素剛性を求めるために用いた文献2）の分割法を利用して数値解析する。この考え方は，板と地盤との接触面を有限個の要素に分割し，各要素での接触圧を一定として，影響係数の概念によ

って変位を重ね合せる。そして，接触面における変位 $\varphi_i(x,y)$ の境界条件から，各要素の未知接触圧に関する連立一次方程式を解く問題に帰着させる。このとき，式(6)は次の未知接触圧に関する連立一次方程式となる。

$$\sum_{k=1}^{N} F(x_\ell - x_k,\, y_\ell - y_k,\, \omega)\,\sigma_i(x_k, y_k) = \varphi_i(x_\ell, y_\ell) \qquad (\ell = 1 \sim N,\ i = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \qquad \text{———} (8)$$

ここで，N は接触面の分割数，$\varphi_i(x_\ell, y_\ell)$ は要素 ℓ の中央点の変位，$\sigma_i(x_k, y_k)$ は要素 k の等分布接触圧の大きさである。また，$F(x_\ell - x_k, y_\ell - y_k, \omega)$ は要素 k の単位等分布加振による要素 ℓ の中央点変位を求める影響係数である。なお，この影響係数はレーレ極を含む特異積分となり，その計算は容易ではない。筆者らはこの影響係数を求める実用的な方法を提案したが，その詳細については文献2)を参照されたい。

式(7)を式(8)に用いて，i 次の固有振動モードに対する地盤反力を $f_i(x_k, y_k, \omega) = \sigma_i(x_k, y_k)$ として求めることができる。そこで，この結果を式(7)とともに式(5)に代入し，固有振動モードの直交性を利用して式(5)を整理すると，係数 A_i に関する連立一次方程式が次式のように得られる。

$$\sum_j A_j \Big[d\cdot c \sum_m \sum_n \Big(\beta_m^4 + \alpha_n^4 - \frac{\rho h \omega^2}{D}\Big) B_{mn}^{(i)} B_{mn}^{(j)} + \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s \big\{ \nu\,(C_{mr}^{*} C_{sn} + C_{rm}^{*} C_{ns}) + 2(1-\nu) D_{mr}^{*} D_{ns} \big\} B_{mn}^{(i)} B_{rs}^{(j)}$$

$$+ \frac{1}{2D} \sum_m \sum_n \sum_{\ell=1}^{N} S_\ell \big\{ \sigma_i(x_\ell, y_\ell) B_{mn}^{(j)} + \sigma_j(x_\ell, y_\ell) B_{mn}^{(i)} \big\} Z_m(x_\ell) Z_n(y_\ell) \Big] = \frac{1}{D} \sum_m \sum_n B_{mn}^{(i)} \int_{-d}^{d}\int_{-c}^{c} p(x,y)\, Z_m(x) Z_n(y)\, dx\, dy$$

$$(i = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \qquad \text{———} (9)$$

ただし，$C_{mr}^{*} = \int_{-c}^{c} Z_m''(x) Z_r(x)\,dx$，$C_{ns} = \int_{-d}^{d} Z_n''(y) Z_s(y)\,dy$，$D_{mr}^{*} = \int_{-c}^{c} Z_m'(x) Z_r'(x)\,dx$，$D_{ns} = \int_{-d}^{d} Z_n'(y) Z_s'(y)\,dy$

$$(-1)^m \cosh\beta_m c\, \sin\beta_m c + \sinh\beta_m c\, \cos\beta_m c = 0 \quad , \quad (-1)^n \cosh\alpha_n d\, \sin\alpha_n d + \sinh\alpha_n d\, \cos\alpha_n d = 0$$

である。また，S_ℓ は要素 ℓ の面積を意味する。なお，式(9)の誘導の詳細については文献1)（ただし，無次元化した式で変形している）が理解の一助になるので参照されたい。

3．計算結果の概要　本研究の解法を実際問題へ適用するためにはいくつかの基礎的な検討が必要である。なお，計算結果の図表等は，紙数の都合上省略し，講演時に譲る。したがって，本文では，計算条件と結果の概要のみについて略述しておく。まず，計算条件としては，正方形板（$2d \times 2d$）の中央に集中点加振力が作用する場合を対象とした。また，数値計算には次のようなパラメータを導入し，無次元化した式で計算した。

$$\gamma = 12\pi\, \frac{(1-\nu^2) E_s}{(1-\nu_s^2) E} \Big(\frac{d}{h}\Big)^3 \quad , \quad \mu = \frac{1-\nu_s}{2\pi} \Big(\frac{\rho}{\rho_s}\Big)\Big(\frac{h}{d}\Big) a_0^2 \gamma \quad , \quad a_0 = \frac{\omega d}{V_s} \qquad \text{———} (10)$$

ここで，V_S は横波の伝播速度，添字 S は半無限弾性体の物理定数を表わす。γ は $1 \sim 1000$，a_0 は $0 \sim 3.0$ に変化させ，μ は $\mu = (1-\nu_s) a_0^2 \gamma / 10\pi$ として求めた。γ が大きくなるとき（板の剛性は相対的に小さくなる），板の動的な変形挙動は複雑になり，級数解の項数を増すとともに接触面の分割数も多くしなければならない。$\gamma = 1000$ とした場合の検討では，中央部のたわみ，接触圧ともに絶対値の項数に対する収束性が悪い。また，同じ分割数では接触圧の精度はたわみよりも低くなっている。しかし，実用的には，項数49（本文の計算例では，対称性が考慮できるため式(7)は $m, n = even$ のみでよい。したがって，項数は $(m+2)(n+2)/4$ となる）程度で十分であることがわかった。一方，分割数は端部のたわみ，接触圧分布に影響を与えるが，その影響は項数のそれよりは小さい。分割数についても，実用的には 14×14（接触面の全象限に対する分割数）程度で十分である。その他，辺長比の影響なども調べたが，その結果は講演時に図表等とともに報告する。

4．あとがき　本文では板の中央に集中点加振力が作用する場合のみを解析対象としたが，本研究の解法は種々の載荷パターンおよび波動入射の問題などへも適用していく必要がある。また，本研究と並行して，板にFEMを適用した場合も解析し級数解との比較検討も行ったが，これについては別の機会に報告する。

参考文献：1) 北村，桜井：土木学会誌，Vol.64-3，1979　2) 北村，桜井：第32回年講，III-156，1977