

長崎大学工学部 正員 ○高橋和雄

榊林建説(株)

内田靖夫

佐藤組(株)

竹内一博

1. 緒言 著者はこれまで非線形振動に関する解析的、実験的研究を報告してきた。これより非線形自由振動および定常強制振動の振動数と振幅の関係の両者が良好に一致を示すことを確認した。しかし実験では理論にない振幅の跳躍現象や対称振動によって逆対称振動が連成する現象が見受けられた。そこで本研究は著者が先に振幅安定判別法として提案した手法²⁾を用いてほりの非線形振動における振幅の安定性を解析した結果および実験との比較を報告するものである。

2. 解法 端部で軸方向変位が拘束された細長いほりに一様分布の周期荷重が作用した場合の運動方程式は次のように与えられる。

$$L(y) = EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 dz \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - P_0 \cos \Omega t = 0 \quad (1)$$

ここに、 E : ほりのヤング率, I : 断面2次モーメント, y : ねわみ, z : 支点からの距離, ρ : ほりの単位長さあたりの質量, A : 断面積, C : 粘性減衰抵抗係数, L : スパン長, t : 時間, P_0 : 外力の荷重強度, Ω : 外力の円振動数,

式(1)を解くために、ねわみ y を次のように仮定する。 $y = r \sum_{n=1}^{\infty} X_n(z) T_n(t)$ (2) ここに、 r : 回転半径,

$X_n(z)$: 境界条件を満足する座標関数, $T_n(t)$: 未知の時間関数

式(2)の $X_n(z)$ としてほりの線形振動の標準関数を用いて、式(1)にガラーキン法を適用すれば次式がえられる。

$$\ddot{T}_n + 2\alpha_n \dot{T}_n + \beta_n^2 T_n + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \beta_{nlm}^2 T_l T_m = \gamma_n \bar{p} \cos \bar{\omega} t \quad (3)$$

ここに、 $\alpha_n = (\lambda_n / \lambda_1)^2$, $\beta_n = \int_0^L C X_n dz / (2K_n \alpha_n)$, $K_n = \int_0^L X_n^2 dz$, $\beta_{nlm}^2 = -\frac{1}{2} \int_0^L \frac{dX_n}{dz} \frac{dX_l}{dz} dz \int_0^L \frac{d^2 X_m}{dz^2} X_n dz / (\lambda_n^2 K_n)$, $\gamma_n = E_n / (\lambda_n^2 K_n)$, $E_n = \int_0^L X_n dz$, $\tau = \omega_1 t$, $\bar{\omega} = \Omega / \omega_1$, $\bar{p} = P_0 L^2 / EI r$, $\lambda_n = L \sqrt{\rho A \omega_n^2 / EI}$

いま、実験に用いている両端固定ほりを対象に、実験で観測された現象を説明するのに必要な系の自由度を3と仮定すれば、式(3)は次のように書き改められる。

$$\ddot{T}_n + 2\alpha_n \dot{T}_n + \beta_n^2 T_n + \beta_{133}^2 T_1^2 T_3 + \beta_{333}^2 T_3^2 T_1 + \beta_{122}^2 T_1 T_2^2 + \beta_{233}^2 T_2 T_3^2 = \gamma_n \bar{p} \cos \bar{\omega} t \quad (4) \quad \text{ここに、} n=1, 3$$

$$\ddot{T}_2 + 2\alpha_2 \dot{T}_2 + \beta_2^2 T_2 + (\beta_{122}^2 T_1^2 + \beta_{222}^2 T_2^2 + \beta_{233}^2 T_3^2) T_2 = 0 \quad (5)$$

荷重がほりの中央に対して対称ならば変形も対称であるから、2次逆対称振動の時間関数 T_2 は通常ゼロである。1次および3次対称振動 T_1 , T_3 のみが常に生ずる応答である。したがって、式(4)は次のように書き改められる。

$$\ddot{T}_n + 2\alpha_n \dot{T}_n + \beta_n^2 T_n + \beta_{133}^2 T_1^2 T_3 + \beta_{333}^2 T_3^2 T_1 = \gamma_n \bar{p} \cos \bar{\omega} t \quad (6)$$

上式の定常解 T_n を次のように仮定する。 $T_n = \sum_{i=1}^3 (a_n^i \cos i \bar{\omega} t + b_n^i \sin i \bar{\omega} t)$ (7) ここに、 a_n^i , b_n^i : 未定定数

式(7)を式(6)に代入して調和バランス法を適用すれば、未定定数 a_n^i , b_n^i を決めるための連立非線形代数方程式がえられ、一様分布荷重をうけるほりの定常応答が求まったことになる。

式(7)を式(6)に代入すれば、次のような係数行列型の微分方程式(Hillの方程式)がえられる。

$$\ddot{T}_2 + 2\alpha_2 \dot{T}_2 + \{g_0 + \sum_{j=1}^3 (g_{2j} \cos j \bar{\omega} t + g_{2j} \sin j \bar{\omega} t)\} T_2 = 0 \quad (8)$$

ここに、 g_0 , g_{2j} および g_{2j} : 振幅成分および β_{nlm}^2 より定まる定数

$T_2 = e^{i\omega_2 t} \bar{T}_2$ のように標準形に変換のうえ、本題の解を次のように仮定する。

$$\bar{T}_2 = e^{i\omega_2 t} \left\{ \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \bar{\omega} t + b_k \sin k \bar{\omega} t) \right\} \quad (9) \quad \text{ここに、} a_k, b_k: \text{未定定数}$$

上式を式(8)に代入して再び調和バランス法を適用すれば、未定定数 a_0 , a_k , b_k を求めるための同次方程式がえられる。

$$G \mathbf{x} = 0 \quad (10) \quad \text{ここに、} G: \text{係数行列, } \mathbf{x}: a_0, a_k, b_k \text{ からなる列ベクトル}$$

上式の $\mathbf{x}$ がゼロベクトル以外の解を持つためには、係数行列 G がゼロでなければならぬことから、固有値問題

として未定定数 n が求められる。固有値 λ の実数部から減衰定数 α_2 を引いた値がすべて負ならば一般解 $e^{(\lambda-\alpha_2)t}$ が時間とともに収束するために安定で、これに対して一つでも正ならば $e^{(\lambda-\alpha_2)t}$ が発散するために T_2 が励振される。

なお、定常振動 T_1 および T_3 の振幅安定性を確かめるためには定常解 T_n に微小かく乱 $\delta n(t)$ を与えることによって生ずる動的応答の安定性を検討すればよい。本題の変分方程式は次の連立の Hill の方程式で与えられる。

$$\ddot{\delta}_i + 2\alpha_{i1}\dot{\delta}_i + \alpha_{i2}\delta_i + (3\alpha_{i11}T_1^2 + 2\beta_{i33}T_1T_3 + \beta_{i33}T_3^2)\delta_1 + (3\alpha_{i33}T_3^2 + \alpha_{i11}T_1^2 + 2\alpha_{i33}T_1T_3)\delta_3 = 0 \quad (11) \quad i=1,3$$

3. 計算結果および実験との比較 非減衰系の荷重強度 $\bar{p}=1.28$ に対する定常強制振動の応答曲線を求めれば図-1に示すとおりである。図の横軸は荷重の振動数を線形1次振動数で無次元化した振動数比 $\bar{\omega}$ で、縦軸はより中央の振幅を回転半径 r で無次元化した振幅比 A である。図中の肉太の実線は荷重と同位相の振幅を、破線は荷重と逆位相の振幅をそれぞれ示すものである。応答曲線に付した記号 a_{ij} は n 次振動形の j 倍の高調波共振もしくは j 倍の分數調波共振を意味する。たとえば a_{11} は $\bar{\omega}=0.2$ 付近に生ずる1次振動の5倍の高調波共振である。応答曲線に斜線を施した領域

は振幅の不安定領域を示すもので、 (i,j) は n 次振動形の j 番目の不安定領域である。1次および2次振動の不安定領域の境界線は各共振の鉛直接線の位置もしくは高調波共振の位置に合致している。なお、計算は減衰を含まなれたために、各共振の振幅は無限大となる。したがって、各共振の極値を持つ付近に存在するはずの上側の境界

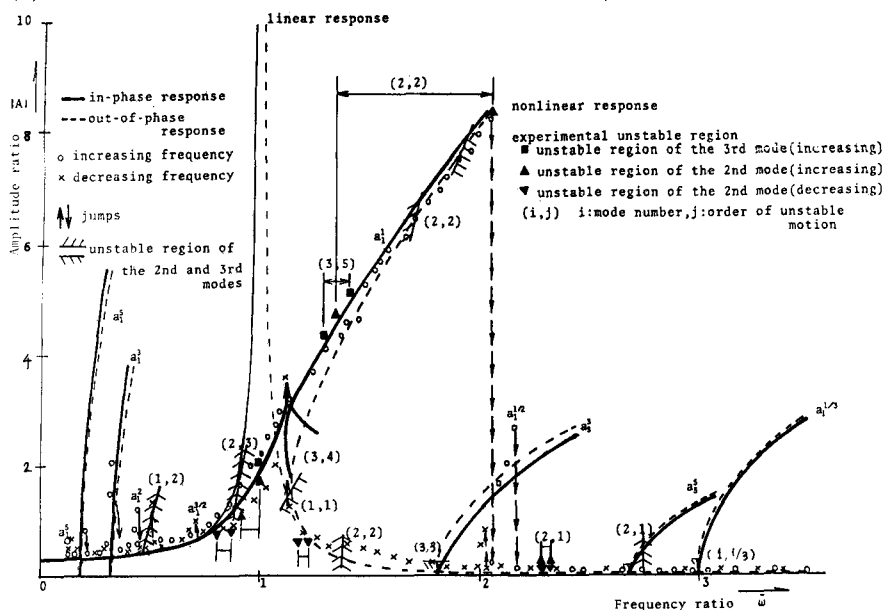


図-1 両端固定はりの応答曲線および振幅の不安定領域

線は求められていない。式(8)から計算される通常励振されない2次逆対称振動は振動数比 $\bar{\omega}=2.8, 1.8, 1.4$ および 0.93 付近に発生し、Mathieu の方程式の第1, 2および3不安定領域に対応するものである。このうち、 $\bar{\omega}=1.8$ 付近の主共振の振幅比の大きい領域に生ずる第2不安定領域の幅はかなり広い。また、図には非線形振動実験結果がプロットされている。図中の○印は掃引周波数を増加させた場合の振幅に、×印は掃引周波数を減少させた場合の振幅に対応するものである。振幅に関する理論と実験とは良い対応を示している。また、矢印↑は振幅の跳躍の生じた方向を示すもので、その位置は振幅が鉛直接線を持つ位置すなわち安定・不安定の境界線に合致している。さらに図には実験による2次・3次振動の不安定領域が記号▲, ▼および■を用いて付記されている。3次振動の不安定領域は掃引上昇時のみ現われ、第4および5不安定領域がえられている。これは3次振動の高調波共振に対応するものである。2次振動の不安定領域は上昇・下降の掃引のいずれのケースにも発生し、第1, 2および3不安定領域がえられている。理論と同じ不安定領域がえられているが、不安定領域の発生する周波数の領域は実験の方が理論よりもかなり広い。以上によつてはりの非線形振動の応答を明らかにするには定常振動の共振の他に振動の安定性を吟味する必要があることが示された。

参考文献 1) 高橋・柿山・竹内: 長崎大学工学部研究報告第11号, pp.73-80, (1978) 2) Takahashi, K. and Kawakura, K.: Theoretical and Applied Mechanics, Vol.26, pp.339-350, 1978