I-224 ケーブルの運動方程式に関する波動論的考察

東京大学 学生員 山口 宏樹
東京大学 正 員 宮田 利雄
東京大学 正 員 伊藤 学

1. はじめに

完全可撓性, および伸長性を仮定したケーブルの運動方程式は2階の偏微分方程式となる。ここでは, これを偏微分方程式論に従い, 標準形に変換し, 波動方程式に帰着させることにより, その物理的意味を明確にする。その際, ケーブル部材の重要な特性の1つである非抗圧縮性のもつ意味も明らかとなる。

2. 基礎方程式[1)]

ケーブルの曲げ剛性は無視し, 断面一定, かつ長さに沿って等分布質量を有するものとする。このとき, ケーブルの運動に関する基礎方程式は次のようになる。

(a) 運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial S_0}\left(\frac{T}{1+\epsilon}\frac{\partial x^i}{\partial S_0}\right)-\rho_0\frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2}+X_0^i=0 \qquad i=1,2,3 \qquad (1)$$

(b) 断面力 - ひずみ関係式

$$T=T(\epsilon) \qquad (2)$$

(c) ひずみ - 変位関係式

$$(1+\epsilon)^2=\frac{\partial x^j}{\partial S_0}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial S_0} \qquad j\text{: dummy index} \qquad (3)$$

ここで, S_0は無応力状態でのケーブル重心線に沿う埋込座標, $[x^1\ x^2\ x^3]$はケーブルの空間位置ベクトル(直交デカルト座標), Tはケーブル張力, ϵは伸びひずみ, ρ_0, X_0^iはS_0に沿った単位長さ当りの質量, および外力成分である。

3. 運動方程式の標準形への変換

運動方程式(1)は2階の3元連立偏微分方程式であり, これを標準形に変換することにより, ケーブル内を伝播する波動が明らかにされる。そこで

$$u^i=\frac{\partial x^i}{\partial S_0}\ ,\quad v^i=\frac{\partial x^i}{\partial t} \qquad i=1,2,3 \qquad (4\text{-a,b})$$

とすれば, 式(1)は1階の6元連立偏微分方程式に帰着し, これをマトリクス表示すれば次のようになる。

$$\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial S_0}+\mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}+\mathbf{f}=0 \qquad (5)$$

ここで

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}' & 0\\ 0 & -\mathbf{I}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{I}\text{: 単位行列} \qquad (6\text{-a})$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & -\rho_0\mathbf{I}\\ \mathbf{I} & 0\end{bmatrix} \qquad (6\text{-b})$$

$$\mathbf{r}^T=[\,u^1\ u^2\ u^3\ v^1\ v^2\ v^3\,] \qquad (6\text{-c})$$

$$\mathbf{f}^T=[\,X^1\ X^2\ X^3\ 0\ 0\ 0\,] \qquad (6\text{-d})$$

$$\mathbf{A}'=\begin{bmatrix}\frac{T}{1+\epsilon}+\frac{\alpha}{1+\epsilon}(u^1)^2 & \frac{\alpha}{1+\epsilon}u^1u^2 & \frac{\alpha}{1+\epsilon}u^1u^3\\ & \frac{T}{1+\epsilon}+\frac{\alpha}{1+\epsilon}(u^2)^2 & \frac{\alpha}{1+\epsilon}u^2u^3\\ \text{sym.} & & \frac{T}{1+\epsilon}+\frac{\alpha}{1+\epsilon}(u^3)^2\end{bmatrix} \qquad (6\text{-e})$$

$$\alpha=\frac{1}{1+\epsilon}\frac{\partial T}{\partial\epsilon}-\frac{T}{(1+\epsilon)^2} \qquad (6\text{-f})$$

ただし, 誘導の際には式(2),(3)をも考慮している。

式(5)に変換マトリクス$\mathbf{T}$を左から乗じて, 次なる標準形に変換することを考える。[2)]

$$\Lambda\mathbf{A}^*\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial S_0}+\mathbf{A}^*\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}+\mathbf{f}^*=0 \qquad (7)$$

ここで, Λは対角行列, また

$$\mathbf{A}^*=\mathbf{TB}\ ,\quad \mathbf{f}^*=\mathbf{Tf} \qquad (8\text{-a,b})$$

である。式(7)の第i行を取り出せば,

$$a^{*i}\left[\lambda^i\frac{\partial}{\partial S_0}+\frac{\partial}{\partial t}\right]\mathbf{r}+f^{*i}=0 \qquad (9)$$

つまり, 勾配が

$$\frac{dS_0}{dt}=\lambda^i \qquad (10)$$

であるような曲線C^iに沿って

$$a^{*i}d\mathbf{r}+f^{*i}=0 \qquad (11)$$

となり, 方程式は1方向のみの微分を含む形となる。このときのλ^iが特性方向で, 式(10)で表わされる曲線

C^i は特性曲線と呼ばれる。

4. ケーブル内を伝播する2つの波動

上述のλ^i, およびa^{*i}は$B^{-1}A$の固有値, および左固有ベクトルとして求められるが, 固有値λ^iがすべて実数のとき, 方程式は双曲型であって, λ^iは波の伝播速度を与える。[2),3)] 式(6)を用いてケーブルの運動方程式の場合の固有値を求めると

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{T}{\rho_0(1+\epsilon)}}=\pm C_0 \quad (\text{重根}) \qquad (12\text{-}a)$$

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial T}{\partial \epsilon}}=\pm C_1 \qquad (12\text{-}b)$$

が得られる。つまり, ケーブル内を伝播する波動は2種類存在し, その伝播速度はC_0, およびC_1である。

特性曲線は物理的には波頭面を意味するから, 速度C_0, C_1で伝播する波動のいかなるかをみるには, 特性曲線を横断しての不連続性を調べればよい。[4)] 以下, 弦の場合を扱ったCristescu[4)]に従い（ケーブルの場合も全く同様）, まず運動方程式から,

$$\frac{1}{(1+\epsilon)^2}\left\{(1+\epsilon)\frac{\partial T}{\partial \epsilon}-T\right\}u^i\left[\frac{\partial \epsilon}{\partial s_0}\right]+\frac{T}{1+\epsilon}\left[\frac{\partial u^i}{\partial s_0}\right]-\rho_0\left[\frac{\partial v^i}{\partial t}\right]=0 \quad {\scriptstyle i=1,2,3} \qquad (13)$$

ここで[ ]は特性曲線を横断しての跳躍を表わす。一方, du^i, dv^iは連続であることから

$$[du^i]=\left[\frac{\partial u^i}{\partial s_0}\right]ds_0+\left[\frac{\partial u^i}{\partial t}\right]dt=0 \qquad (14\text{-}a)$$

$$[dv^i]=\left[\frac{\partial v^i}{\partial s_0}\right]ds_0+\left[\frac{\partial v^i}{\partial t}\right]dt=0 \qquad (14\text{-}b)$$

式(14-a,b)を式(13)に代入し, 式(10)を用いれば, 特性曲線を横切るときの跳躍に関する適合条件式が次のように導かれる。

$$\frac{1}{(1+\epsilon)^2}\left\{(1+\epsilon)\frac{\partial T}{\partial \epsilon}-T\right\}u^i\left[\frac{\partial \epsilon}{\partial s_0}\right]+\left\{\frac{T}{1+\epsilon}-\rho_0\lambda^2\right\}\left[\frac{\partial u^i}{\partial s_0}\right]=0 \quad {\scriptstyle i=1,2,3} \qquad (15)$$

伝播速度C_0に対応する波動を考えると, 式(12-a)を式(15)に代入して次式を得る。

$$\left[\frac{\partial \epsilon}{\partial s_0}\right]=0 \qquad (16)$$

これは, 特性曲線に沿ってひずみ変化がないことを意味し, この波動が, 形状変化だけが伝播する横波であることがわかる。

一方, 伝播速度C_1に対応する波動については, 式(12-b)を式(15)に代入すれば,

$$\left[\frac{\partial u^i}{\partial s_0}\right]\Big/\frac{\partial x^i}{\partial s}=\left[\frac{\partial \epsilon}{\partial s_0}\right] \quad {\scriptstyle i=1,2,3} \qquad (17)$$

となり, 変形の跳躍がひずみ変化の跳躍にのみ影響を与えることがいえ, この波動が形状を変えない縦波であることがわかる。

以上より, ケーブル内を伝播する波動は, 速度C_0で伝播する横波と, 速度C_1で伝播する縦波との2種であることが明らかとなった。

5. まとめ

2階の偏微分方程式を標準形に変換する際, 生ずる固有値問題の固有値がすべて実数であれば, その方程式は双曲型, いわゆる波動方程式を表わすことになる。ケーブルの運動方程式の場合にも, 固有値が式(12-a, b)なる実数であるとして2種の波動の存在を示し, 波動方程式に帰着することを述べた。しかし, ρ_0, $1+\epsilon$, $\partial T/\partial \epsilon$（線形弾性体であればEA;伸び剛性）はすべて正値をとるものの, 弦以外のサグを有するケーブルでは, 特に極端に弛緩したケーブルでは, 運動中, 局部的に断面力として圧縮力を生じ得るものと考えられ, Tは負値をとり得る。従ってこの場合には固有値は虚数となり, 横波の伝播速度は定義されず, また方程式ももはや双曲型ではなく, ケーブルの運動はこの時点で波動に起因するものではなくなる（現象としては振動中のケーブルにみられる局部的なたるみに対応するものと考えられる）。このような物理的不連続現象は完全可撓性を仮定した定式化に基づくものであるが, ケーブルがいかなる圧縮力にも抵抗し得ない, いわゆる非抗圧縮性を有する部材であるということを運動学的に示している。従って式(1)なる運動方程式を厳密に扱うことにより, ケーブルの特性を十分表わし得た運動を論ずることができると思われる。

（参考文献）

1) 山口, 伊藤; 単一ケーブルの三次元線形自由振動, 土木学会論文報告集 No.286, 1979, 6.

2) 例えば Forsythe, Wasow; Finite-Difference methods for Partial Differential Equations, (邦訳, 吉岡書店), 1960

3) 例えば 谷内, 西原; 非線形波動, 岩波書店, 1977

4) Cristescu; Dynamic Plasticity (邦訳, コロナ社), 1967