

北海道大学 工学部 学生員 三 上 敬 司  
 北海道大学 工学部 正 員 能 町 純 雄  
 北海道大学 工学部 正 員 角 田 与史雄

## 1. はじめに

この種の研究については, Arnold 以来多くの研究が行なわれており, Arnold は表面のWを0とおき, 半無限弾性体の上にある集中質量を与えたときの応答を検討している。本論文は, 直径 2aの低い質量がその表面に密着している半無限弾性体に SH 波が進入するとき十分に時間が経過した状態で, その質量の存在が進入SH 波 に与える影響を論じたものである。

## 2. 解析方法

動的三次元応力のつり合い方程式は, 次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

また, 弾性問題におけるHookeの法則は,

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial U}{\partial r} + \lambda \left( \frac{U}{r} + \frac{\partial V}{r \partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \\ \sigma_\theta &= (2\mu + \lambda) \left( \frac{U}{r} + \frac{\partial V}{r \partial \theta} \right) + \lambda \left( -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \\ \sigma_z &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial W}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial V}{r \partial \theta} \right) \\ \tau_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \right), \quad \tau_{\theta z} = \mu \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{r \partial \theta} \right), \quad \tau_{r\theta} = \mu \left( \frac{\partial U}{r \partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \right) \dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここで,  $\mu$ ,  $\lambda$  は Lamé の弾性定数である。

(1) 式において, 時間にはラプラス変換, 空間にはフーリエーハンケル変換を施すことによって, 次のように解が得られる。

ここで,

$$\left\{ \begin{matrix} A \\ B \\ W \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} H_{m+1} \left[ \begin{matrix} \sqrt{s} A \\ \sqrt{s} B \\ \sqrt{s} W \end{matrix} \right] \\ H_{m-1} \left[ \begin{matrix} \sqrt{s} A \\ \sqrt{s} B \\ \sqrt{s} W \end{matrix} \right] \\ H_m C_m \left[ \begin{matrix} \sqrt{s} A \\ \sqrt{s} B \\ \sqrt{s} W \end{matrix} \right] \end{matrix} \right\}$$

$$a_{11} = \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{e^{-\alpha z}}{\rho s^2 \alpha} \left( \frac{\rho s^2}{\mu} + \frac{\xi^2}{2} \right) + \frac{\xi^2}{2 \rho s^2 \beta} e^{-\beta z} \right] \dots\dots (3)$$

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{22} = a_{11}, \quad a_{23} = -a_{13}$$

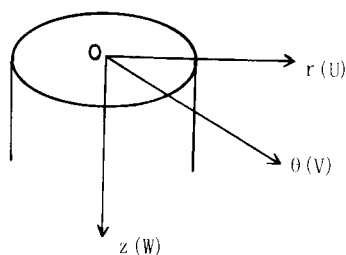
$$a_{31} = -a_{32} \quad \text{etc.}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} U &= \int_0^\infty e^{st} ds \int_0^\infty \xi \{ A J_2(\xi r) + B J_0(\xi r) \} d\xi \cdot \cos m\theta \\ V &= \int_0^\infty e^{st} ds \int_0^\infty \xi \{ A J_2(\xi r) - B J_0(\xi r) \} d\xi \cdot \sin m\theta \\ W &= \int_0^\infty e^{st} ds \int_0^\infty \xi J_1(\xi r) d\xi \cdot \cos m\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

上式中の  $T$ ,  $W$  は, 境界条件によって決定される値である。

ここで, 境界条件は  $m = 1$ ,  $z = 0$  で次式のように仮定する。



円柱座標 Fig-1

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{3M_y e^{i p t x}}{2\pi r_0^3 (r_0^2 - r^2)^{3/2}} \\ \tau_{xz} &= T_x \frac{e^{i p t}}{r_0 (r_0^2 - r^2)^{3/2}} \end{aligned} \right\} \quad r_0 \geq r$$

$$\sigma_z, \tau_{xz} = 0 \quad \text{else where}$$

U と  $dw/dx$  の  $r_0 \geq r$  における平均値を  $U_a$ ,  $\phi_a$  とおけば,

$$I_p \ddot{\phi}_a + M_y e^{i p t} = 0 \quad \text{--- (6)}$$

$$m_0 \ddot{U}_a + T_x e^{i p t} = -m_0 F p^2 \quad \text{--- (7)}$$

いま,  $I_p$  が無視できる程小さいとすれば,  $M_y = 0$  とおける。

ただし,  $F, p$  を進入 SH 波による振幅と円振動数とする。

式(1) ~ (4) によって求められたものに,  $z=0$  の境界条件を入れ, 解式を Arnold の形式によって, 整理すれば,

$$U_a = \text{Re} \left[ \frac{T_x e^{i p t}}{G r_0} (f_1 + i f_2) \right] \quad \text{--- (8)}$$

上式と(7)式から,

$$|\tau_x| = \frac{F r_0 G a_0^2}{\{(1 - b a_0^2 f_1)^2 + (b a_0^2 f_2)^2\}^{1/2}} \quad \text{--- (9)}$$

$$|\ddot{U}_a + \ddot{U}_0| = \frac{F p^2}{\{(1 - b a_0^2 f_1)^2 + (b a_0^2 f_2)^2\}^{1/2}} \quad \text{--- (10)}$$

となる。

### 3. 数値計算例

数値計算例としては,  $v=0$  で, mass ratio ( $=b$ ) が, 60.4, 18.3, 8.1, 4.0 の各値に対して, Fig-2 は縦軸に, せん断力, 横軸に, frequency factor ( $=a_0$ ) をとり, plot したものであり, Fig-3 は, 同様に, 各  $b$  に対して, 縦軸に加速度倍率, 横軸に  $a_0$  をとり plot したものである。

Fig-2 より, せん断力のピーク点は,  $b$  が小さくなるにつれて, 右側に移動し, かつ, 小さくなり, 曲線の山が平滑化されている。以上述べたことは,  $b$  が大きい値をもつとき,  $a_0$  がある程度大きな値をとることによって, せん断力は分散され, 小さくなっていくことがわかる。Fig-3 の加速度倍率についても同様なことが言える。

### 参考文献

Arnold, R.N., Bycroft, G.N. and Warburton, G.B.:  
"Forced vibrations of a body on infinite elastic solid"

