

岩手大学 学生員 佐藤修一
北海道大学 正員 渡辺 昂
岩手大学 正員 宮本 裕

弾性支点および弾性床を有する構造物の応力解析は、ケーナル、地盤反力等を考慮した場合に有効な方法である。そこで、変形法を用いて影響線をもたせ、多質点モデルの応答解析を考えた。応答解析には Newmark の B 法 ($B = 1/4$ の平均加速度法) を用いた。

1. 剛性マトリックス

(1) 弾性支点を有するラーメン部材の剛性マトリックス

弾性支点として回転に抵抗するばねと、変位に抵抗するばねを考慮する。そうすると剛性マトリックスの対角要素にそれぞれ k_1 のばね定数を加えたものが弾性支点を考慮した部材の剛性マトリックスとなる。式 (1) の $k_1, k_2, \dots$ はそれぞれ、ばねの型式 1, 2, $\dots$ のばね定数である。

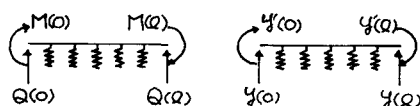
$$\begin{Bmatrix} M(0) \\ M(L) \\ Q(0) \\ Q(L) \\ P(0) \\ P(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} + k_1 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ & \frac{4EI}{L} + k_2 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ & & \frac{12EI}{L^3} + k_3 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 \\ & & & \frac{12EI}{L^3} + k_4 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{AE}{L} + k_5 & -\frac{AE}{L} \\ & & & & & \frac{AE}{L} + k_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y(0) \\ y'(L) \\ \delta(0) \\ \delta(L) \end{Bmatrix} \quad \text{SYM.}$$

(2) 弾性床上面の剛性マトリックス (要素間に均重がない場合)

$$\begin{Bmatrix} Q(0) \\ M(0) \\ Q(L) \\ M(L) \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4\beta^3(\sin\beta L \cos\beta L + \sinh\beta L \cosh\beta L) & -2\beta^3(\sin^2\beta L + \sinh^2\beta L) & -4\beta^3\sin\beta L \cosh\beta L + \cos\beta L \sinh\beta L & -4\beta^3\sin\beta L \sinh\beta L \\ 2\beta(\sinh\beta L \cosh\beta L - \sin\beta L \cos\beta L) & 4\beta^3\sin\beta L \sinh\beta L & -2\beta(\cos\beta L \sinh\beta L - \sin\beta L \cosh\beta L) & 2\beta^3\cosh^2\beta L + \sin^2\beta L \\ 4\beta^3(\cos\beta L \sin\beta L + \cosh\beta L \sinh\beta L) & -2\beta(\cos\beta L \sinh\beta L - \sin\beta L \cosh\beta L) & 2\beta^3\sinh^2\beta L + \sin^2\beta L & 2\beta(\sinh\beta L \cosh\beta L - \sin\beta L \cos\beta L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y(L) \\ y'(L) \end{Bmatrix} \quad \text{SYM.}$$

$$\beta = \sqrt{k/4EI}$$

$$\sinh\beta L = \sinh\beta L \quad \cosh\beta L = \cosh\beta L$$



2. 1 質点の場合の絶対加速度応答

(1) Duhamel 積分

図 1 のような 1 質点の力学モデルにおいて質点の質量 m 、弾性係数を k 、減衰係数を c とし、時刻 t における質点の変位を $y(t)$ 、地盤の変位を $z(t)$ とすると次式のような運動方程式が成立する。

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = -m\ddot{z}(t) \quad (3)$$

ここで $\omega = \sqrt{k/m}$, $h = c/2m\omega$ とすると式 (3) は

$$\ddot{y}(t) + 2h\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = -\ddot{z}(t) \quad (4)$$

式 (4) の厳密解は Duhamel 積分であらわす。絶対加速度

$\ddot{y}(t) + \ddot{z}(t)$ は式 (5) で与えられる。

$$\ddot{y}(t) + \ddot{z}(t) = \frac{\omega}{\sqrt{1-h^2}} \int_0^t \ddot{z}(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \cos\left\{\sqrt{1-h^2}\omega\tau(t-\tau) + \tan^{-1} \frac{2h-1}{2h\sqrt{1-h^2}}\right\} d\tau \quad (5)$$

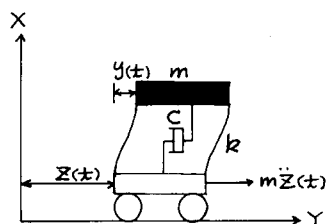


図 1

(2) Newmark α β 法 ($\beta = 1/4$ の平均加速度)

式(4)と式(5)から時刻 t と時刻 $t+\Delta t$ の関係導き、 $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$ とおくと式(6)が得られる。

$$\ddot{y}(t+\Delta t) = \ddot{y}(t) + (1-\gamma)\ddot{y}(t)\Delta t + \gamma\ddot{y}(t+\Delta t)\Delta t$$

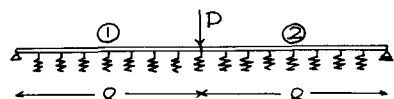
$$y(t+\Delta t) = y(t) + \ddot{y}(t)\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{y}(t)\Delta t^2 + \beta\ddot{y}(t+\Delta t)\Delta t^2$$

$$\begin{bmatrix} y(t+\Delta t) \\ \dot{y}(t+\Delta t) \\ \ddot{y}(t+\Delta t) \end{bmatrix} = \frac{1}{8+2\omega\Delta t(4h-\omega\Delta t)} \begin{bmatrix} 8(1+h\omega\Delta t) & 4\Delta t(2+h\omega\Delta t) & 2\Delta t & -2\Delta t^2 \\ -4\omega\Delta t & 2(4-\omega^2\Delta t) & 4\Delta t & -4\Delta t \\ 8\omega^2 & -8\omega(2h+\omega\Delta t) & -2\omega\Delta t(4h+\omega\Delta t) & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t+\Delta t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

したがって $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $\ddot{y}(0)$, $\ddot{z}(t)$ が既知であれば Δt ごとに y , $\dot{y}$, $\ddot{y}$ を計算され、絶対加速度が得られる。

3. 数値計算例

(1) 弾性床土上の応力計算 (カッパ四角理論値)



部材 左端曲げモーメント

右端曲げモーメント (kg·cm)

① 0.0 (0.0)

10.99 (10.99)

② -10.99 (-10.99)

0.0

部材 左端せん断力

右端せん断力 (kg)

① 0.067 (0.067)

-0.5 (-0.5)

② -0.5 (-0.5)

0.067 (0.067)

基礎係数 $k = 1 \text{ kg/cm}^2$ 部材長 $L = 100 \text{ cm}$

剛性係数 $EI = 10^6 \text{ kg·cm}^2$ 荷重 $P = 1 \text{ kg}$

(2) 盛岡平山山橋 (歩行者、自転車専用斜張橋) の塔の地震応答解析

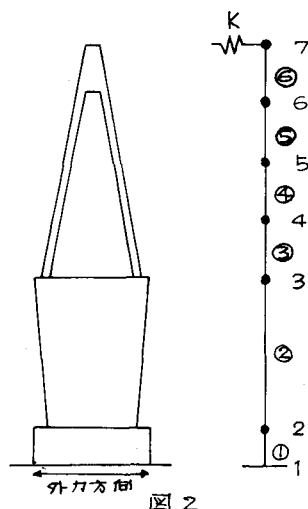


図 2

一般図と力学モデルを図 2 に示す。また質点重量、剛性係数、部材長を

以下に示す。

質点重量 (kg) 剛性係数 (kg·cm²) 部材長 (cm)

$m_2 = 313910$ $EI_2 = 0.717 \times 10^{16}$ $L_2 = 220$

$m_3 = 145657$ $EI_3 = 0.113 \times 10^{16}$ $L_3 = 980$

$m_4 = 1414$ $EI_4 = 0.738 \times 10^{14}$ $L_4 = 421$

$m_5 = 1414$ $EI_5 = 0.380 \times 10^{14}$ $L_5 = 421$

$m_6 = 1746$ $EI_6 = 0.128 \times 10^{14}$ $L_6 = 421$

$m_7 = 1039$ $EI_7 = 0.426 \times 10^{13}$ $L_7 = 300$

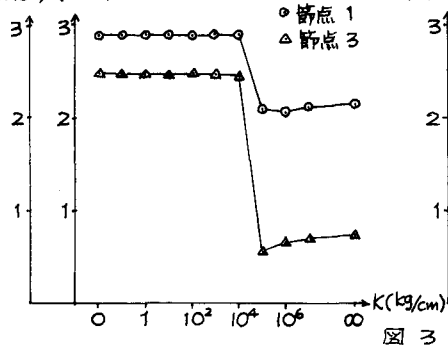
外力は EL Centro 地震波 (最大加速度を 62 gal に縮小) を使い、減衰

係数 $h = 0.02$ とし、2 秒間入力した。このとき、塔頂ばね定数 K を C から

無限大まで変化した場合の節点 1 および節点 3 の曲げモーメント、お

よびせん断力応答の各最大値を図 3 に示す。左図に示される通り、ばね

節点 1 3 曲げモーメント (kg·cm)
($\times 10^7$) ($\times 10^6$)



節点 1 3 せん断力 (kg)
($\times 10^4$) ($\times 10^3$)

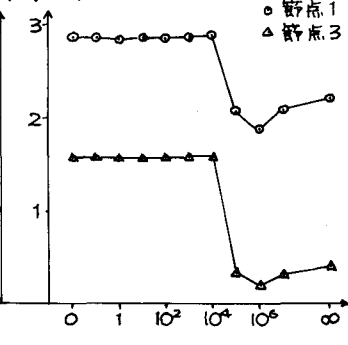


図 3

定数 K の小さい場合は応答値には

ほとんど変化が無く、 $K = 10^4 \sim 10^5$ 付近で変化が著しくなる。

また、節点 6、7 附近の塔頂付近ではばね定数の変化による応答値の変化は小さい。