

土木研究所 正員 山田 晴利

筑波大学 正員 西岡 隆

7. まえがき

構造物の耐震設計を確立するためには、設計地点に耐用期間中に来襲するであろう地震動のモデル化、基礎地盤系も含めた構造物の動特性のモデル化、予想される地震動に対するモデル化された系の応答、および破壊に対する安全性の照査の四段階のそれぞれを実験的・理論的に追求していかなければならない。本研究はショット・ノイズ加振をうける非線型系の応答を明らかにするとともに、*Filtered Shot Noise* を用いて地震波をモデル化することを目的としたものである。

2. ショット・ノイズ加振をうける非線型系の応答

非定常ショット・ノイズは確率過程の一つで、次式によって特徴づけられている。

$$E[S(t)] = 0, \quad E[S(t_1)S(t_2)] = I(t_1)\delta(t_2 - t_1) \quad \dots (1a, b)$$

ただし、 $E[\cdot]$ はアソシアル平均を表わし、 $\delta(t)$ は Dirac のデルタ関数である。また $I(t)$ は非負の値をとる確定関数でショット・ノイズの強度関数と呼ばれる。非定常ショット・ノイズの非定常性をとらえるために物理スเปクトルを用いた。非定常ショット・ノイズの物理スเปクトルは次式で与えられる。

$$S_{ss}(f, t; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [w(t-u)]^2 \cdot I(u) du \quad \dots (2)$$

ただし、 $w(t)$ は物理スเปクトルのウィンドウ関数で、本研究では矩形型ウィンドウを用いた。式(2)からわかるように、ショット・ノイズの物理スเปクトルは時間みの函数となり周波数には依存しない。

さて、線型系の場合には加振力の確率統計的性質が明らかなら、系の応答の確率統計的性質は比較的容易に求めることができるが、非線型系の場合にはそれは出来ない。しかし、加振力が正規ショット・ノイズあるいは *Filtered Shot Noise* なら、系が非線型であってもその応答はマルコフ・ペクトルとなることが知られている。マルコフ・ペクトルはその初期条件が確率1で定まっているならば、推移確率密度函数によって完全に規定される。推移確率密度函数は Fokker-Planck 方程式を解くことによって得られるが、Fokker-Planck 方程式に対する解析解はほとんど得られていない。本研究では Fokker-Planck 方程式を重みつき残差法によって連立常微分方程式系に変換し、これを Runge-Kutta-Gill 法で数値的に解き、推移確率密度函数を求め、非線型系の応答の確率統計的性質を明らかにする。

非線型系としては Duffing Oscillator を選んだ。

$$\ddot{X}(t) + 2\beta\omega_0\dot{X}(t) + \omega_0^2(X(t) + \eta X(t)^3) = S(t) \quad \dots (3)$$

ただし、 β, ω_0, η は定数で、 $0 < \beta < 1, 0 < \omega_0$ 。位相平面上のペクトル $[X(t), \dot{X}(t)] = [Y_1(t), Y_2(t)]$ はマルコフ・ペクトルとなり、推移確率密度函数 $p(y_1, y_2, \pm 1 | y_1^0, y_2^0, t_0)$ の充て込み Fokker-Planck 方程式は、

$$\frac{\partial p}{\partial t} + y_2 \frac{\partial p}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2} [\{2\beta\omega_0 y_2 + \omega_0^2(y_1 + \eta y_1^3)\} p] - \frac{I(t)}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y_2^2} = 0 \quad \dots (4)$$

初期条件は $t = t_0$ で $p(y_1, y_2, t_0 | y_1^0, y_2^0, t_0) = \delta(y_1 - y_1^0) \cdot \delta(y_2 - y_2^0)$ 。 $\dots (5)$
である。 p は次のような形で近似する。

$$\hat{p}(y_1, y_2, t | y_1^0, y_2^0, t_0) = \sum_k \sum_l Q^{kl}(t) \cdot g_k\left(\frac{y_1}{U(t)}\right) \cdot g_l\left(\frac{y_2}{U(t)}\right) \quad \dots (6)$$

ただし、 $U(t)$ はスケールン関数、 $Q^{kl}(t)$ は未知函数で、 $g_m(\xi) = (-1)^{m-1} \cdot \frac{d^{m-1}}{d\xi^{m-1}} e^{-\xi^2/2} (m \geq 1)$ Hermite 多項式を重み函数として選び、重みつき残差法を用いると $Q^{kl}(t)$ に関する連立常微分方程式系が得られる。これを数値的に解くことによって推移確率密度函数を、従って応答の統計量と求めることができる。

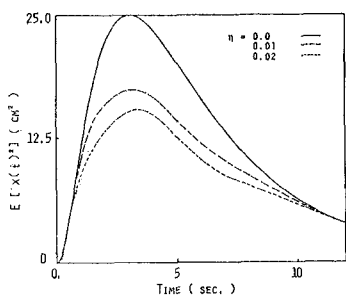


FIG. 1. VARIANCE OF DISPLACEMENT $x(t)$

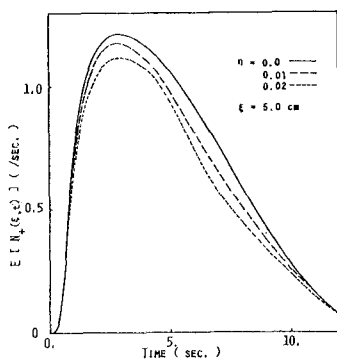


FIG. 2. EXPECTED RATE OF THRESHOLD CROSSING

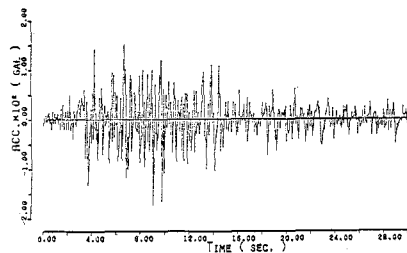


FIG. 3. TAFT EARTHQUAKE ACCELERATION (NZ12)

式(3)で $\beta = 0.05$, $\omega_0 = 4\pi/\text{sec}$.
 としたDuffing Oscillatorについて η
 の値を0., 0.01, 0.02と変え, 応
 答の統計量を求めた結果を図1, 図2に
 示す. ただしショット・ノイズの強度函
 数は次のように仮定した.

$$I(t) = C \cdot (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \quad \dots (8)$$

$$\alpha = 0.95/\text{sec}, \quad \beta = 0.8782/\text{sec}, \quad C = 24845.88$$

図1は応答変位の分散を表わしている. これによると非線形項が入ると分散の最大値がかなり小さくなること
 がわかる. しかし加振力が小さいところでは非線形項の影響はほとんど現れない. 図2は応答変位があるレベ
 ルを単位時間に下から上へ横切る回数の期待値を表わしている. この場合にも図1とはほぼ同じ傾向が認められる.

3. 地震波のシミュレーション

すでに述べたようにショット・ノイズの物理スpectrumは周波数 f により一定となる. これに対しショッ
 ト・ノイズを二次の線形フィルターに通して得られるFiltered Shot Noiseの物理スpectrumは線形フィルタ
 ーの固有周波数のところで鋭いピークをもつ. すなわちFiltered Shot Noiseはほぼ単一の周波数成分から成
 ており, その物理スpectrumは次式で与えられる.

$$S_{FF}(f, t; \omega) = \frac{e^{-4\pi\beta f_0 t}}{4\pi^2 f_d^2 T} \int_0^\infty I(\tau) |H_e(f, t-\tau)|^2 e^{4\pi\beta f_0 \tau} d\tau \quad \dots (9)$$

ただし β , f_0 はそれぞれ線形フィルターの減衰定数, 固有周波数で, $f_d = \sqrt{1-\beta^2} \cdot f_0$, $H_e(f, t)$ は二変数
 f, t の複素変数である. 二つの独立な確率過程の和として得られる確率過程の物理スpectrumはもとの確率過
 程の物理スpectrumの和となるから, それぞれ異なる β と f_0 をもつ線形フィルターに适当な強度関数をもつた
 ショット・ノイズを入力して得られるFiltered Shot Noiseをいくつか重ね合わせるにより地震加速度波の
 もつ物理スpectrumと同じ物理スpectrumをもつ確率過程をシミュレートできるはずである. その際, ショット
 ノイズの強度関数は式(9)で左辺を実地震波の物理スpectrumとおきかえ式を逆に解いて求めることができる.
 ここでは, TAFT NZ12成分を対象としてシミュレーションを行った. その結果得られたサンプル地震
 波とともに図3に示した.