I-154 マルコフ連鎖を用いた地震生起の確率モデルに関する二三の考察

筑波大学構造工学系 正会員 ○西岡 隆
スタンフォード大学 H.C.Shah

過去の記録から将来予想される地震の頻度とその規模や震度を確率論的手法によって合理的に算定することは，各種都市施設や構造物の耐用年数あるいは荷重を推定する上できわめて重要な課題である。本報告は比較的応用範囲の広いマルコフ連鎖を用いて，二三の地震生起の確率モデルを検討し，過去の地震記録への適用，それらモデル間の関係，都市施設・構造物の設計に対する応用について検討したものである。以下に基本的な考え方を記述する。

(i) ランダム生起モデル

現時点までの地震の生起の数を $X(t) = i$ とし，将来の地震の生起が現在時点の生起の数のみに依存し，過去の生起に影響されないものと考えれば，$X(t)$はマルコフ連鎖で求められる。いまマルコフ連鎖のΔt 時間の遷移行列の要素を$P_{ij}(\Delta t)$で与えると，

$$P_{ij}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t)=j|X(t)=i\} \tag{1}$$

ただし，Δtは時間$(0,t)$をNに等分したものとする。$X(t)$は増加関数であるから，$i > j$の範囲では，$P_{ij}(\Delta t)=0$である。Δtの時間内に地震が多くとも1回は起るものとし，その生起確率をpとおけば，$P_{ii}(\Delta t) = 1 - p$, $P_{i,i+1}(\Delta t) = p$, $P_{NN}(\Delta t) = 1$，かつそれ以下の要素は全て0に等しい。したがって，$t=n\Delta t$の状態ベクトル$P_j(n\Delta t)$のj成分は，次式のように表わされる。

$$P_j(n\Delta t) = \sum_{i=0}^{N} P_i(0)P_{ij}(n\Delta t) \tag{2}$$

ただし，

$$P_{ij}(n\Delta t) = {}_nC_{j-i}(1-p)^{n-j+i}p^{j-i} \tag{3}$$

また，$P_i(0)$は$t=0$の状態ベクトルのi成分を表わしている。初期状態の生起が0に等しいとすれば，$P_0(0) = 1$, $P_i(0) = 0 \quad (i=0)$であるから，$t=n\Delta t$後に地震生起の数がjになる確率は，

$$P_j(n\Delta t) = {}_nC_j(1-p)^{n-j}p^j \tag{4}$$

で与えられることになる。これは二項分布にほかならない。

いま全体の地震の発生率をλ_0とし，全ての地震の内で震度iの地震が発生する確率関数をc_iで表わすとすれば，式(4)から震度I以上の地震が起る生起確率を求めることができる。

$$\begin{aligned} P\{X_I(n\Delta t) > 1|X(0) = 0\} &= 1 - P\{X_I(n\Delta t) = 0|X(0) = 0\} \\ &= 1 - (1 - \lambda_I\Delta t)^n \end{aligned} \tag{5}$$

ただし，$\lambda_I = \lambda_0\sum_{i=I}^{s-1}c_i \quad (\sum_{i=1}^{s}c_i = 1)$である。$\Delta t \longrightarrow 0$のときには式(5)は指数分布を表わしている。

(ii) ある震度の超過確率モデル

Δt時間に状態iから状態jへ遷移する確率を$q_{ij}(\Delta t)$で表わすものとすれば，遷移行列は$q_{ij}(\Delta t)$を各要素にもつ行列で表わすことができる。したがって，$t=n\Delta t$の遷移行列のi,j要素$q_{ij}(n\Delta t)$は，

$$q_{ij}(n\Delta t) = \sum_{a=0}^{s-1}\sum_{b=0}^{s-1}\cdots\sum_{u=0}^{s-1}\sum_{v=0}^{s-1} q_{ia}(\Delta t)q_{ab}(\Delta t)\ldots q_{uv}(\Delta t)q_{vj}(\Delta t) \tag{6}$$

で与えられる。ただし，sは状態の総数を表わしている。$q_{ij}(n\Delta t)$は$t=0$での状態iから$t=n\Delta t$での状態jへの遷移確率であるが，図-1に示すようにその途中の経路は考えられる全ての場合を含んでいる。そこで状態iを地震の震度iと読み変えれば，$t=n\Delta t$の間に震度j以上の地震が発生しては意味をもたないから，このような事態を避けるための工夫が必要になる。

そこで新たに，Δt時間の遷移行列を$Q_{ij}(\Delta t)$で表わすものとし，$Q_{ii}(\Delta t) = \sum_{k=0}^{i} q_{ik}(\Delta t) \quad (i = j)$, $Q_{ij}(\Delta t)$

$= q_{ij}(\Delta t)$ $(i < j)$, $Q_{ij}(\Delta t) = 0$ $(i > j)$ とおけば，$Q_{ii}(\Delta t)$は震度iを越えない状態に留まっている確率を，$Q_{ij}(\Delta t)$ $(i < j)$は，iより高い震度の地震jが発生した結果，震度jを越えない状態に遷移した確率を表わすことになる。ergodicな場合に限って考えると，$Q_{ij}(\Delta t) = Q_j(\Delta t)$ と表わすことができるから，$t = n\Delta t$の遷移行列の各要素は，$Q_i(n\Delta t) = 0$ $(i > j)$，$Q_i(n\Delta t) = Q_i^n(\Delta t)$ $(i = j)$，$Q_i(n\Delta t) = Q_i^n(\Delta t) - Q_{i-1}^n(\Delta t)$ $(i < j)$，で与えられる。したがって状態を$I(t)$で表わすと，

$$P\{I(n\Delta t) = j \mid I(0) = i\} = Q_j^n(\Delta t) - Q_{j-1}^n(\Delta t) \quad (i < j) \qquad (7)$$
$$P\{I(n\Delta t) \leq i \mid I(0) = i\} = Q_i^n(\Delta t) \quad (i = j)$$

となり，震度Iを超過する地震の生起確率は，式(7)より以下のように与えられる。

$$P\{I(n\Delta t) \geq i \mid I(0) = i\} = \sum_{j=I}^{s-1}\{Q_j^n(\Delta t) - Q_{j-1}^n(\Delta t)\} = 1 - \{\sum_{j=0}^{I-1} q_j(\Delta t)\}^n \qquad (8)$$

$q_i = \lambda_0 C_i \Delta t$, $q_0 = 1 - \lambda_0 \Delta t$ の関係を上式に代入すれば，式(8)は式(5)に一致する。

(iii) 震度iの地震の再現モデル

ある震度または規模の地震が再び発生するまでの期間や，その再現性の確率を求めるには，マルコフ連鎖は適している。$t = 0$の時，状態iにある条件の下で，$t = n\Delta t$に到る間にjを経験することなく，$t = n\Delta t$に初めてjの状態になる確率は，マルコフ連鎖では初期通過時間確率とよばれている。

$$P\{I(k\Delta t) \neq j, k=1,2,..n-1,\ I(n\Delta t) = j \mid I(0) = i\} = f_{ij}^{(n)}(s) \qquad (9)$$

ただし，

$$f_{ij}^{(n)}(s) = \sum_{a\neq j}^{s-1}\sum_{b\neq j}^{s-1}\cdots\cdots\sum_{u\neq j}^{s-1}\sum_{v\neq j}^{s-1} q_{ia}q_{ab}\cdots\cdots q_{uv}q_{vj} \qquad (10)$$

しかし，この関係を直接地震生起の確率を求めるために利用することはできない。なぜなら，図－1に示すように，たとえ$t = n\Delta t$までの間に震度jの地震が発生しなくても，震度jを越える地震が起らないとも限らないからである。そこで$t = n\Delta t$までにjを越える地震が起らないような確率を求めるとすれば，

$$P\{I(k\Delta t) < j, k=1,2,..n-1,\ j>i,\ I(n\Delta t) = j \mid I(0) = i\} = f_{ij}^{(n)}(j)$$
$$= \sum_{a=0}^{j-1}\sum_{b=0}^{j-1}\cdots\sum_{u=0}^{j-1}\sum_{v=0}^{j-1} q_{ia}q_{ab}\cdots q_{uv}q_{vj} \qquad (11)$$

を求めればよい。特にergodicでかつ$j = i$の場合には，$t = n\Delta t$後に震度iの地震が再び起る確率は，

$$P\{I(k\Delta t) < i, k=1,2,..n-1,\ I(n\Delta t) = i \mid I(0) = i\} = \lambda_i \Delta t(1-\lambda_I \Delta t)^{n-1} \qquad (12)$$

またこのときの初期通過時間 $\mu_{ii}(i)$は，

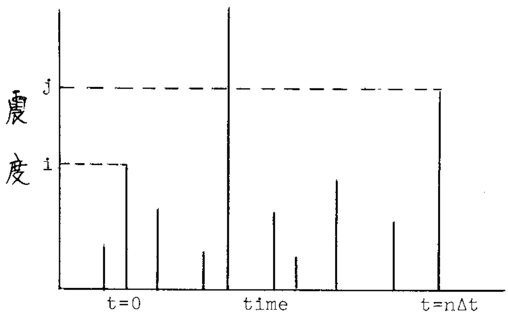
$$\mu_{ii}(i) = \lambda_i \Delta t^2 \sum_{m=1}^{\infty} m(1 - \lambda_I \Delta t)^{m-1} \qquad (13)$$

で与えられる。式(11)を用いて，$t = n\Delta t$後に震度iを越える地震の生起確率 $F_{ii}^{(n)}(i)$を求めると，

$$F_{ii}^{(n)}(i) = \sum_{m=1}^{n} f_{ii}^{(n)}(i) = \lambda_I \Delta t \sum_{m=1}^{n}(1 - \lambda_I \Delta t)^{m-1} \qquad (14)$$

が得られるが，式(14)は代数公式を用いてまとめると，式(5)に一致する。またこの時の初期通過時間は，震度i以上の地震の再現期間にほかならない。

マルコフ連鎖を用いた上記の方法は，地震の生起に対するさまざまな情報を得るために利用することができる。現象が非定常な場合やHomogenious でない場合の解析には特に有効であるものと思われる。以上の地震生起の確率モデルを具体的に適用し，過去の地震記録を用いて設計への応用を検討した。



図－1 地震の震度と生起の関係