

東京都立大学 正会員 ○野上和栄

東京都立大学 正会員 伊藤文人

1. まえがき 本報告は、弾性座屈問題と初期曲りを含む幾何学的非線形及び残留応力を持つ材料非線形を考慮した柱の耐荷力問題について、最近注目を集めている川井氏らの新しい離散モデルを参考にした剛体要素-バネ系モデル(ジャンレーモデルの拡張モデル)により解析し、さらに材片の局部座屈の発生により柱の最終耐荷力かどのように影響を受けるかを検討したものである。

2. 解析モデル 解析モデルは要素自身を剛体と見なし、要素間をバネ(曲げひずみ、軸ひずみの両方を従属的に考慮できるよう上下フランジ断面に取り付けた2本の伸縮バネ)を結合し、このバネに弾性体としての力学的特性(材料非線形特性を含む)を与えるものである。従って有限要素法に比して1節点当りの自由度数が2個で済む。バネ常数は、連続体としての要素のひずみエネルギーとバネのひずみエネルギーが等価になるように決定し、要素が等分割であれば

$$K_i^{(1)} = K_i^{(2)} = K = (m-1)EA/2L, \quad k = r \quad (1)$$

なる関係式が得られる。ここに $(m-1)$ はバネの節点数、 L は柱の全長、 A は断面積、 r は断面中心から両側取り付け位置までの距離、 r は断面2次半径(図-1)

3. 解析法 解析仮定は、1)両端要素以外等分割要素 2)両端ヒンジ 3)柱の断面は箱型H型(強軸)対称断面で腹板無視 4)応力-ひずみ曲線は残留応力の有る完全弾塑性曲線であり、さらに局部座屈発生時応力が水平移行に入る(図-4)である。本解析モデルにおける座屈荷重は細長比を含む2次の固有値問題になり、次の行列式から得られる。

$$\begin{vmatrix} (\lambda/2\alpha)^2 - \lambda/2 + 1 & (\lambda/2\alpha)^2 - 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (\lambda/2\alpha)^2 - 1 & 2(\lambda/2\alpha)^2 - \lambda + 2 & (\lambda/2\alpha)^2 - 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda/2\alpha)^2 - 1 & 2(\lambda/2\alpha)^2 - \lambda + 2 & (\lambda/2\alpha)^2 - 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(\lambda/2\alpha)^2 - \lambda + 2 & (\lambda/2\alpha)^2 - 1 \\ (\alpha^2\lambda)/2 & \alpha^2 - \lambda & \alpha^2 - \lambda & \alpha^2 - \lambda & \cdots & \alpha^2 - \lambda & (\alpha^2\lambda)/2 \end{vmatrix}_m = 0 \quad (2)$$

$$\text{ここに } \alpha = L/(m-1)r, \quad \lambda = PL/2Kk^2(m-1)$$

非線形解析は、Newton-Raphson法を用い、荷重を従属変数にレ変位増分により行なう。

全ポテンシャルエネルギー U 及び釣合方程式は次式で与えられる。つまり

$$U = \sum_{i=1}^{m-1} \left[\int_0^{\delta_i^{(1)}} f_i d(\delta_i) + \int_0^{\delta_i^{(2)}} f_i d(\delta_i) \right] - P \left[\frac{L}{2(m-1)} (\cos \theta_1^{(1)} + \cos \theta_m^{(2)} - \cos \theta_1 - \cos \theta_m) + \frac{L}{m-1} \sum_{i=2}^{m-1} (\cos \theta_i^{(1)} - \cos \theta_i) + \sum_{i=1}^{m-1} \delta_i \cos \left(\frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \right) \right] \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} f_i^{(1)} + f_i^{(2)} - P \cos \left(\frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \right) &= 0 \quad (i=1, m-1), \\ f_i^{(1)} - f_{i-1}^{(2)} - f_i^{(1)} + f_i^{(2)} - \frac{PL}{m-1} \sin \theta_i + \frac{P\delta_{i-1}}{2} \sin \left(\frac{\theta_{i-1} + \theta_i}{2} \right) \\ &+ \frac{P\delta_i}{2} \sin \left(\frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \right) = 0 \quad (i=2, m-1) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

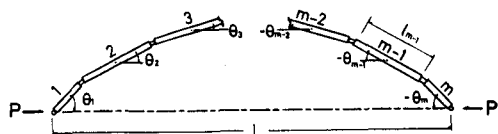


図-1 柱の解析モデル

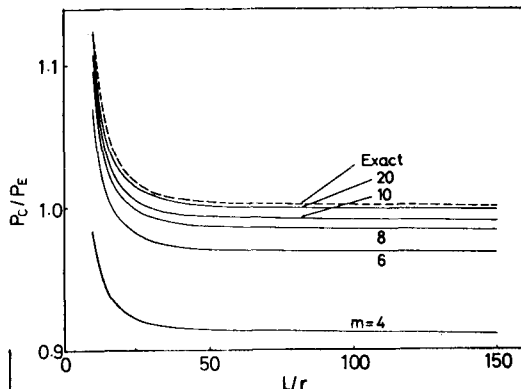


図-2 固有値と要素分割数の比較

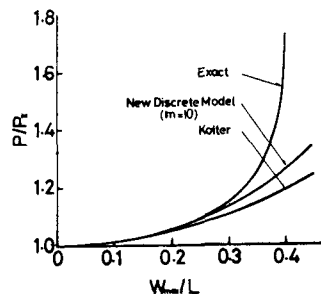


図-3 エラスティカ曲線

とろぞ(4)式や(3)式、(3)式の総和は次の境界条件を含んでいるので

$$\frac{L}{2(m-1)} (\sin \theta_1 + \sin \theta_m) + \frac{L}{m-1} \sum_{i=2}^{m-1} \sin \theta_i - \sum_{i=1}^{m-1} \delta_i \sin \left(\frac{\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_{i+1}}{2} \right) = 0 \quad (5)$$

自由度数を考慮して(4)式や(3)式の $i=m$ 式の代りに(5)を使った。

ただし δ_i は非線形バネ力、 δ_i は軸方向変位、 θ_i は初期曲り、 $\delta_i^{(0)}$ 、 $\delta_i^{(1)}$ はバネの伸縮変位量。 θ_i 、 δ_i 、 P の近似値を $\bar{\theta}_i$ 、 $\bar{\delta}_i$ 、 $\bar{P}$ としこれらの変数の修正量 $\Delta \theta_i^*$ 、 $\Delta \delta_i^*$ 、 ΔP ($\theta^* = \theta_i - \bar{\theta}_i$) は次式より得られる。ただし $\dot{f} = \frac{df}{d(\alpha L)}$

$$\Delta \theta_{i-1}^* = \left(\dot{f}_i^{(0)} + \dot{f}_i^{(1)} \right) \Delta \delta_i + \left\{ \frac{\bar{P}}{2} \sin \left(\frac{\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_{i+1}}{2} \right) - R \left(\dot{f}_i^{(0)} - \dot{f}_i^{(1)} \right) \right\} \Delta \theta_i^* + \left\{ \frac{\bar{P}}{2} \sin \left(\frac{\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_{i+1}}{2} \right) + R \left(\dot{f}_i^{(0)} - \dot{f}_i^{(1)} \right) \right\} \Delta \theta_{i+1}^* - \cos \left(\frac{\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_{i+1}}{2} \right) \Delta P \quad (i=1, m-1)$$

$$\Delta \theta_2 = \left\{ \frac{\bar{P}}{2} \sin \left(\frac{\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2}{2} \right) - R \left(\dot{f}_1^{(0)} - \dot{f}_1^{(1)} \right) \right\} \Delta \delta_1 + \left\{ -\frac{\bar{P}L}{2(m-1)} \cos \bar{\theta}_1 + \frac{\bar{P}\bar{\delta}_1}{4} \cos \left(\frac{\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2}{2} \right) + R \left(\dot{f}_1^{(0)} + \dot{f}_1^{(1)} \right) \right\} \Delta \theta_1^* + \left\{ \frac{\bar{P}\bar{\delta}_1}{4} \cos \left(\frac{\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2}{2} \right) - R \left(\dot{f}_1^{(0)} + \dot{f}_1^{(1)} \right) \right\} \Delta \theta_2^* - \left\{ \frac{L}{2(m-1)} \sin \bar{\theta}_1 - \frac{\bar{\delta}_1}{2} \sin \left(\frac{\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2}{2} \right) \right\} \Delta P$$

$$\Delta \theta_i = \left\{ \frac{\bar{P}}{2} \sin \left(\frac{\bar{\theta}_{i-1} + \bar{\theta}_i}{2} \right) + R \left(\dot{f}_{i-1}^{(0)} - \dot{f}_{i-1}^{(1)} \right) \right\} \Delta \delta_{i-1} + \left\{ \frac{\bar{P}}{2} \sin \left(\frac{\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_{i+1}}{2} \right) - R \left(\dot{f}_i^{(0)} - \dot{f}_i^{(1)} \right) \right\} \Delta \delta_i + \left\{ \frac{\bar{P}\bar{\delta}_{i-1}}{4} \cos \left(\frac{\bar{\theta}_{i-1} + \bar{\theta}_i}{2} \right) - R \left(\dot{f}_{i-1}^{(0)} + \dot{f}_{i-1}^{(1)} \right) \right\} \Delta \theta_{i-1}^* + \left\{ -\frac{\bar{P}L}{m-1} \cos \bar{\theta}_i + \frac{\bar{P}\bar{\delta}_i}{4} \cos \left(\frac{\bar{\theta}_{i-1} + \bar{\theta}_i}{2} \right) + \frac{\bar{P}\bar{\delta}_i}{4} \cos \left(\frac{\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_{i+1}}{2} \right) + R \left(\dot{f}_{i-1}^{(0)} + \dot{f}_{i-1}^{(1)} \right) \right\} \Delta \theta_i^* + \left\{ \frac{\bar{P}\bar{\delta}_i}{4} \cos \left(\frac{\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_{i+1}}{2} \right) - R \left(\dot{f}_i^{(0)} + \dot{f}_i^{(1)} \right) \right\} \Delta \theta_{i+1}^* - \left\{ \frac{L}{m-1} \sin \bar{\theta}_i - \frac{\bar{\delta}_i}{2} \sin \left(\frac{\bar{\theta}_{i-1} + \bar{\theta}_i}{2} \right) - \frac{\bar{\delta}_i}{2} \sin \left(\frac{\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_{i+1}}{2} \right) \right\} \Delta P \quad (i=2, m-1)$$

$$\Delta \theta_{m-1} = - \sum_{i=1}^{m-1} \left\{ \sin \left(\frac{\bar{\theta}_{i-1} + \bar{\theta}_i}{2} \right) \Delta \delta_i \right\} + \left\{ \frac{L}{2(m-1)} \cos \bar{\theta}_1 - \frac{\bar{\delta}_1}{2} \cos \left(\frac{\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2}{2} \right) \right\} \Delta \theta_1 + \sum_{i=2}^{m-1} \left\{ \left[\frac{L}{m-1} \cos \bar{\theta}_i - \frac{\bar{\delta}_{i-1}}{2} \cos \left(\frac{\bar{\theta}_{i-1} + \bar{\theta}_i}{2} \right) - \frac{\bar{\delta}_i}{2} \cos \left(\frac{\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_{i+1}}{2} \right) \right] \Delta \theta_i \right\} + \left\{ \frac{L}{2(m-1)} \cos \bar{\theta}_m - \frac{\bar{\delta}_{m-1}}{2} \cos \left(\frac{\bar{\theta}_{m-1} + \bar{\theta}_m}{2} \right) \right\} \Delta \theta_m$$

4. 解析結果

本解析モデルの固有値は、軸ひずみを含んだ厳密解に分割数 $m=30$ ほどとると一致したが、 $m=10$ でも十分な精度が得られたので以後の解析では $m=10$ を採用した。(図-2) エラスチカ問題において、本モデル解は従来の厳密解と Koiter の近似解の中間値を示した(図-3)。非線形解析において、局部座屈の影響を考慮しない場合 ($\beta=1.0$)、変位増分-荷重曲線は全ての細長比に対し、最終耐力に達し圧縮側バネが全断面降伏した後塑性モメント曲線 ($P/P_y = 1/(1+W/R)$) に沿う。又局部座屈の影響を考慮すると、圧縮バネは最終耐力に達する前に全断面降伏状態になり β の値が小さくなる程著しい(図-5)。柱の耐力曲線において、短柱領域では $P/P_y = \beta$ が支配的になり、長柱領域になると耐力

に局部座屈の影響がほとんどなくなり、これらの中間領域で $\beta=1.0$ の耐力曲線に漸近している(図-6)。最後に本研究に御助力下さった木内榮氏(前田建設)、荒川勲氏(埼玉東庁)に深く感謝する次第です。使用電算機都府庁 FACOM1605 文献 1) 川井, 近藤 New Beam and Plate Bending Elements in Finite Element Analysis, 生屋研究 20, 9, 1976 2) 川井, 都井 A New Element in Discrete Analysis of Plane Strain Problems 生屋研究, 29, 4, 1979 3) 川井 固体力学における新しい離散化手法, ISSC 第11回4-72 解析研究発表論文集 1977 4) 川井, 近藤 川井モデルの数学的考察, ISSC 第11回4-72 解析研究発表論文集 1977 5) 川井, 近藤 新しい離散化手法による3次元連続体の最終強度解析, ISSC 第11回4-72 解析研究発表論文集, 1977

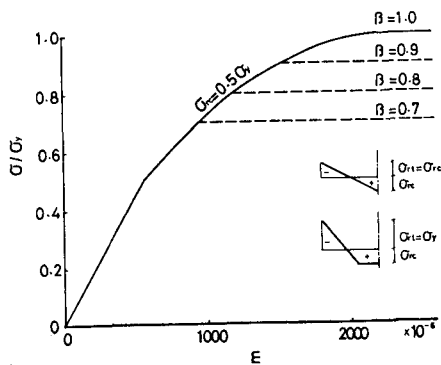


図-4 変位-ひずみ曲線

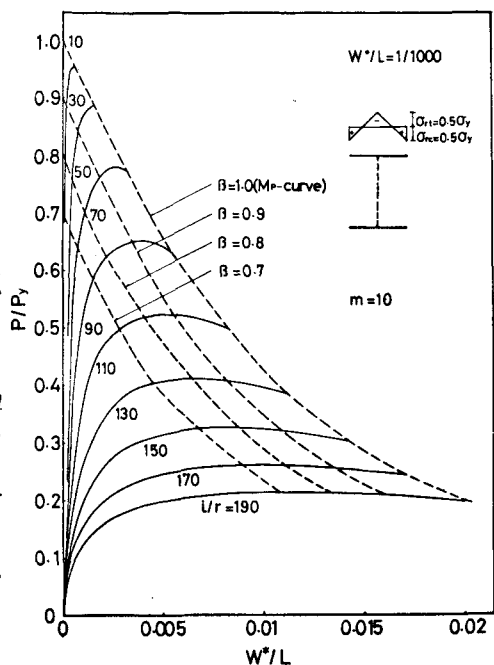


図-5 変位増分(中央節点)-荷重曲線

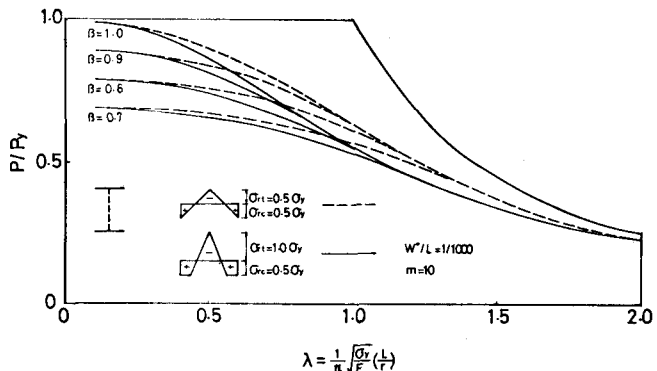


図-6 残留耐力と初期曲りが有る場合の柱の耐力曲線