I-104　鋼曲線桁の有限変位問題

山梨県土木部　正員　丸山正視
山梨大学工学部　正員　深沢泰晴

1. はじめに

構造物を合理的に設計するには，その終局耐力を正確に把握することが必要不可欠である。ところが，その終局耐力評価の問題は，材料の非線形性と変形の幾何学的非線形性の両者を含んだ高度の非線形問題となる場合が多く，その正確な解析はかなりの困難を伴なうことが知られている。本報告は，基礎的段階として幾何学的非線形問題のみを取りあげて，鋼構造物の終局耐力評価の際に必要となる有限変位問題のより合理的な解析法の追求にかかわるものである。すなわち，移動座標系と荷重又は変位増分法との組み合せによって，座屈後挙動のような大変位の範囲まで安定した解析が行なえる手法の開発を目ざすものである。ここではこの解析法を薄肉ばりの座屈後挙動の追跡，ならびにまだ一般的に有効な解析法が見い出されていない薄肉曲線桁の有限変位問題に適用した結果について報告する。

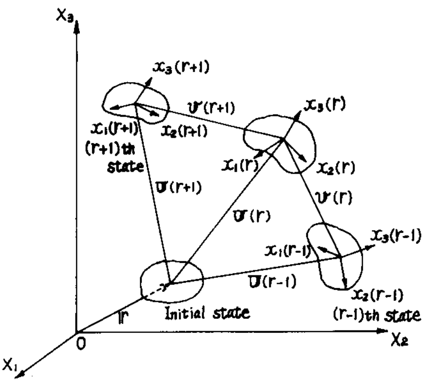
2. 基礎方程式

一般に鋼やコンクリートのような構造材料においては，微小ひずみの条件が成立する。この条件に従うならばひずみ－変位関係の非線形性は，剛体回転による変位に起因している。ここではこの観点にたち，変位を要素座標系での剛体変位を含まない変位と，全体座標系での変位とに分けて考え，両者の関係に基づき荷重増分法を導入した解析法を考える。

図－1は物体内の一要素が荷重増分の進行に従って変位していく様子を示している。要素座標系を x_i，全体座標系を X_i とする。増分が進行し，r番目での状態量が全て決定しているものとする。すなわち，全体座標系での変位 $U_{(r)}$，要素の応力（次の荷重増分をかけるときに初期応力と考える）$\overset{(0)}{\sigma}_{ij(r)}$，要素座標系 $x_{i(r)}$ の方向によって定まる要素の回転である。要素座標系での荷重増分ベクトルを $\{f^*_{(r+1)}\}$，変位増分を $\{v^*_{(r+1)}\}$ と表わすと，両者の間には初期応力 $\overset{(0)}{\sigma}_{ij(r)}$ に依存するマトリクス $[\mathbb{K}^*_{(r+1)};\overset{(0)}{\sigma}_{ij(r)}]$ を介して

$$\{f^*_{(r+1)}\}=[\mathbb{K}^*_{(r+1)};\overset{(0)}{\sigma}_{ij(r)}]\{v^*_{(r+1)}\} \quad \text{-----------} (1)$$

と表わされる関係がある。また要素座標系 $x_{i(r)}$ と全体座標系 X_i との関係によって定まる全体座標から要素座標への変換行列 $[\Pi_{(r)}]$ を用いると，式(1)は全体座標系によって次のように表わされる；



図－1

$$\{f_{(r+1)}\}=[\Pi_{(r)}]^T[\mathbb{K}^*_{(r+1)};\overset{(0)}{\sigma}_{ij(r)}]\{v^*_{(r+1)}\} \quad \text{-----------------------------} (2)$$

ここで＊のない量は全体座標系での量を表わす。式(2)を解き $v_{(r+1)}$ を決定し

$$\{U_{(r+1)}\}=\{U_{(r)}\}+\{v_{(r+1)}\} \quad \text{-----------------------------------} (3)$$

によって荷重 $\mathbb{F}_{(r+1)}$ による変位 $U_{(r+1)}$ が決定される。要素の応力を求め，要素座標 $x_{i(r+1)}$ を設定し，次の荷重増分を加える。この手順を荷重 $\mathbb{F}_{(n)}$ が所定の大きさになるまで繰り返す解析法を用いる。

式(1)で用いた初期応力に依存する剛性マトリクス $[\mathbb{K}^*_{(r+1)};\overset{(0)}{\sigma}_{ij(r)}]$ を求めるため，ここでは初期応力存在下での仮想仕事の原理を用いるものとする。有限変位弾性論に従えば，変形後の状態に対する仮想仕事の原理は，

$$\int_V[(\sigma_{ij}^{(0)}+\sigma_{ij})\,\delta e_{ij}-(\bar{P}_i^{(0)}+\bar{P}_i)\,\delta v_i]dV-\int_A(\bar{S}_i^{(0)}+\bar{S}_i)\,\delta v_i\,dA=0 \quad \text{---------------} (4)$$

$\bar{P}_i$，$\bar{S}_i$ は物体力，表面力のi方向成分である。初期状態における外力は初期応力とつり合っているので式(4)は

$$\int_V[\sigma_{ij}\delta e_{ij}+\sigma_{ij}^{(0)}v_{k,i}\,\delta v_{k,j}-\bar{P}_i\,\delta v_i]dV-\int_A\bar{S}_i\,\delta v_i\,dA=0 \quad \text{-----------------} (5)$$

となる。e_{ij} は，ひずみテンソルで　$e_{ij}=\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i}+v_{k,i}v_{k,j})$　である。これまでは変位に何の制限も加えていないが，荷重増分の微小性により，変位 v_i は微小と考えられる。したがって，式(5)は

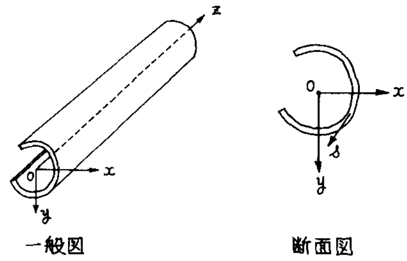
$$\int_V[\sigma_{ij}\delta\epsilon_{ij}+\sigma_{ij}^{(0)}v_{k,i}\delta v_{k,j}-\bar{P}_i\delta v_i]dV-\int_A\bar{S}_i\delta v_i dA=0 \quad \text{------------ (6)}$$

と書き換えられる。ここに　$\epsilon_{ij}=\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})$　である。

3. 薄肉材への適用

前項で述べた解析法を薄肉弾性材（図－２）の有限変位解析に適用する。一般に用いられている薄肉材の仮定と，荷重増分の微小性を考慮すると，変位関数は一次元化された線形理論によってよく知られた次式の形で与えられる；

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 - y\varphi,\quad v = v_0 + x\varphi \\ w &= w_0 - x\,du_0/dz - y\,dv_0/dz - \omega\,d\varphi/dz \end{aligned}\right\} \text{--- (7)}$$



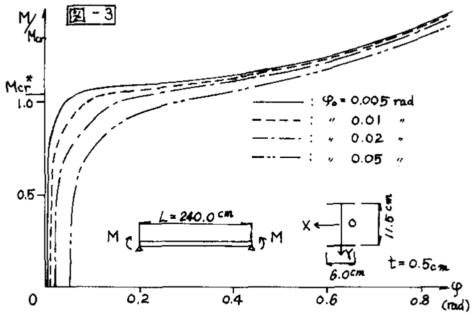
図－２　薄肉材の座標

ここに，サフィックス０は断面の図心に関する量を意味する。また，式(6)は薄肉材に対して次のように書ける；

$$\int_l\int_A\Big[\sigma_{zz}\delta\epsilon_{zz}+2\tau_{sz}\delta\gamma_{sz}+\sigma_{zz}^{(0)}\Big\{\frac{du}{dz}\delta\Big(\frac{du}{dz}\Big)+\frac{dv}{dz}\delta\Big(\frac{dv}{dz}\Big)+\frac{dw}{dz}\delta\Big(\frac{dw}{dz}\Big)\Big\}$$
$$-\{p_x\delta u+p_y\delta v+p_z\delta w\}\Big]dA\,dz=0 \quad \text{--------- (8)}$$

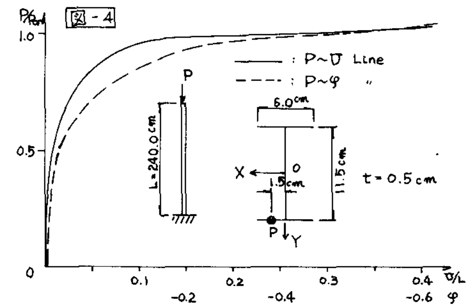
式(8)に有限要素法を適用すると，要素座標系での剛性方程式がえられ，全要素について重ね合わせることにより，全体座標系での増分つり合い式がえられることになる。

本報告での解析法においては，増分の進行とともに刻々と空間での位置を変えていく各節点を直線で結び，直線要素で近似している。したがって，最初から空間に任意の曲率を有して曲っている曲線材に対しても，予め直線要素で折れ線近似することにより，大した困難もなくその大変位問題を直線材の場合と同様に解析できる。



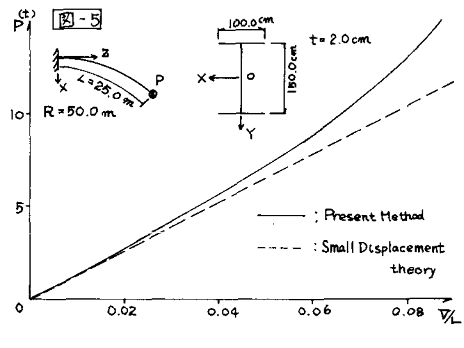
4. 数値解析例

上述の解析法を用いて，薄肉材の各種の有限変位問題の数値解析を行っているが，ここには，①Ｉ形ばりの横倒れ座屈後挙動（図－３，M_{cr}^* は変形を考慮した座屈値），②Ｉ形断面柱の２軸偏心圧縮問題（図－４），③片持支持の曲線ばりの有限変位解析（図－５）の３例の計算結果の一部を図示した。なお，数値解析結果の詳細については講演当日にゆづる。



5. むすび

薄肉材の座屈後挙動や薄肉曲線材の有限変位問題のような大変位の範囲まで比較的短時間で追跡でき，しかも安定した数値計算が行える解析法を示した。この方法は材料非線形問題を併せ解析することも可能であり，薄肉構造の終局耐力の評価に有効なものと考えられる。



参考文献　(1) Washizu, K : Variational Method in Elasticity and Plasticity, Pergamon, 1968. (2) Bazant, Z.P. & M.E. Nimeiri : Proc. of ASCE, EM6, Dec. 1973 (p.1259～1281)。(3) 西野 他：土木学会論文集第225号 1974.5 (p1～15)。