

電力中央研究所 正員
 東京大学工学部 正員

平田和太
 西野文雄

1. まえがき

初等はり理論では、変形前に軸に直交する平面は、変形後も軸に直交するという仮定がなされるが、この仮定は、せん断ひずみが生じないということと等価である。せん断応力による変形を考慮に入れた場合、せん断ひずみは中立軸からの距離に比例しなくなる。この現象はせん断遅れと呼ばれており、箱桁橋の解析で問題となることがある。せん断遅れの解析法としては、はりを構成する板要素が平面応力状態にあるとして、平面応力問題として解析することが行なわれてきているが、2次元問題として取り扱う以上解析は複雑になる。そこで2次元問題を逐次近似法により1次元問題に帰着させてせん断遅れを解析することを試みる。

2. 解析方法

解析にあたっては、次の条件の成り立つはりを扱う。
 (i) 荷重はねじれが発生しないように加わるものとし、また軸力は加わらないものとする。
 (ii) 断面形状は変化しない。
 (iii) ポアソン比は0とする。

はりを構成する板要素の平面応力理論は次のようにまとめられる。

$$\text{応力-ひずみ関係} \quad \sigma_x = E \epsilon_x, \quad \tau = G \gamma \quad (1-a, b)$$

$$\text{ひずみ-変位関係} \quad \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2-a, b)$$

$$\text{微小要素のつり合い式} \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ここに v は変位の y 方向成分で、変位の x 方向成分 u との関係は、 $\gamma = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = v'(x)$ (4)

逐次近似は次のように行う。せん断ひずみ γ を0とする初等はり理論の仮定および(2-b)、(4)より $w = \gamma v$ (5)

これを(2-a)、(1-a)、(3)に代入して得られるせん断応力分布は、 $\tau = \left[\frac{E}{G} \int_0^S \gamma ds \right] v'(x)$ (5)

これはせん断ひずみ $\gamma = 0$ の仮定から得られる τ と一致せず、ここに初等はり理論の矛盾がある。この矛盾を解消するために、できるだけ実情に近いと思われる γ の分布形を仮定する。そこで γ の分布形を(5)、(1-b)より、次のように仮定する。 $\gamma = \left[\frac{E}{G} \int_0^S \gamma ds \right] \varphi_{1,1}(x)$ (6)

[] 内は断面内のせん断ひずみの分布形状、 $\varphi_{1,1}(x)$ は x 方向の分布形を表わす。次に(6)の仮定の下ではり理論を導く。 $\gamma = 0$ の仮定より導かれる初等はり理論を第1次近似理論とすると、この理論は第2次近似理論とみなすことができる。(6)、(2-b)および軸力0を表わす式 $\int_0^{S_c} \sigma_x ds = 0$ より $w = -\gamma v'(x) - f_3(x) \varphi_{1,1}(x)$ (7)

ここに $f_3 = \frac{E}{G} \left[\frac{1}{A} \int_0^{S_c} \int_0^S \frac{1}{x} \gamma ds ds - \int_0^S \frac{1}{x} \gamma ds \right]$
 S は S 軸と $x-z$ 平面の交点の S 座標、 A は部材の断面積、積分区間 $[0, S_c]$ は、断面全体を意味する。式(7)の右辺第1項は初等はり理論による軸方向変位であり、第2項は軸方向変位の補正項である。(7)、(2-a)、(1-a)、(3-a)より得られるでは、

$$\tau = \left[\frac{E}{G} \int_0^S \gamma ds \right] v'(x) + \left[\frac{E}{G} \int_0^S \gamma ds \right] \varphi_{1,1}(x) \quad (8)$$

となり、(6)の仮定より得られる τ と一致しない。そこで次に(8)で得られる τ の分布形から(1-b)を用いて次のように γ の分布形を仮定する。

$$\gamma = \left[\frac{E}{G} \int_0^S \gamma ds \right] \varphi_{2,1}(x) + \left[\frac{E}{G} \int_0^S \gamma ds \right] \varphi_{2,3}(x) \quad (9)$$

(9)の仮定から第3次近似理論を導く。以下同様に逐次近似をすすめていくと、一般に n 次近似理論における x 方向の変位成分 w は次のように表わされる。

$$w = -f_1(x) v'(x) \quad (n=1)$$

$$w = -f_1(x) v'(x) - \sum_{i=2}^n f_{2i-1}(x) \varphi_{n-1, 2i-3}(x) \quad (n \geq 2) \quad (10-a, b)$$

$$\text{ここに } f_1(x) = \gamma, \quad f_{2i-1}(x) = \frac{E}{G} \left[\frac{1}{A} \int_0^{S_c} \int_0^S \frac{1}{x} f_{2i-3}(x) ds ds - \int_0^S \frac{1}{x} f_{2i-3}(x) ds \right] \quad (11)$$

3. 支配方程式

仮想仕事の原理より、つり合い式および境界条件を求める。分布荷重 $\bar{P}_d = P_d \delta_y$ 、両端断面に $\bar{P}_s = \bar{P}_s \delta_y + \bar{P}_{sz} \delta_z$ なる荷重が作用するはりを考える。この荷重が作用するはりに対しての仮想仕事の原理は次のように表わされる。

$$\int_{Z_1}^{Z_2} \left[\int_0^S \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau \delta \gamma \right] t ds dz - \int_{Z_1}^{Z_2} \left[\int_0^S \bar{p}_{dy} \delta v + \bar{p}_{dz} \delta w \right] t ds dz + [m_z]_0^S (\bar{p}_{sy} \delta v + \bar{p}_{sz} \delta w) t ds \Big|_{Z_1}^{Z_2} = 0 \quad (12)$$

$$ここに m_z = \begin{cases} -1 & \text{at } z=Z_1 \\ 1 & \text{at } z=Z_2 \end{cases}$$

また仮想運動場は、(2-a,b), (10-a,b) より

$$\delta v = \delta v(z)$$

$$\delta w = -f_1(s) \delta v^{(1)}(z) - \sum_{i=2}^n f_{2i-1}(s) \delta \varphi_{n-1, 2i-3}(z)$$

$$\delta \epsilon_z = -f_1(s) \delta v^{(1)}(z) - \sum_{i=2}^n f_{2i-1}(s) \delta \varphi_{n-1, 2i-3}^{(1)}(z)$$

$$\delta \gamma = -\sum_{i=2}^n \frac{d}{ds} f_{2i-1}(s) \delta \varphi_{n-1, 2i-3}(z) \quad (13-a,b,c,d)$$

これを式(12)に代入することにより、つり合い式及び境界条件を得る。

$Z_1 \leq z \leq Z_2$ におけるつり合い式

$$M_1^{(2)} + \bar{P}_y = 0$$

$$M_{2i-1}^{(1)} - V_{2i-1} = 0 \quad (i=2,3,\dots,n) \quad (14-a,b)$$

$z=Z_1, Z_2$ における境界条件

$$v = C \quad \text{または} \quad M_1 - m_z \bar{V} = 0$$

$$v^{(1)} = C_1 \quad \text{または} \quad M_1 - m_z \bar{M}_1 = 0$$

$$\varphi_{n-1, 2i-3} = C_{2i-3} \quad \text{または} \quad M_{2i-1} - m_z \bar{M}_{2i-1} = 0$$

$$(i=2,3,\dots,n) \quad (15-a,b,c)$$

$$ここに \bar{P}_y = \int_0^S \bar{p}_{dy} ds, \quad M_{2i-1} = \int_0^S \sigma_z f_{2i-1}(s) t ds$$

$$\bar{M}_{2i-1} = \int_0^S \bar{p}_{sz} f_{2i-1}(s) t ds, \quad \bar{V}_{2i-1} = \int_0^S \frac{d}{ds} f_{2i-1}(s) t ds$$

$$\bar{V} = \int_0^S \bar{p}_{sy} t ds$$

上で得られたつり合い式を与えられた境界条件の下で解くことにより、変位関数 $v(z), \varphi_{n-1, 2i-3}(z)$ が求まり、

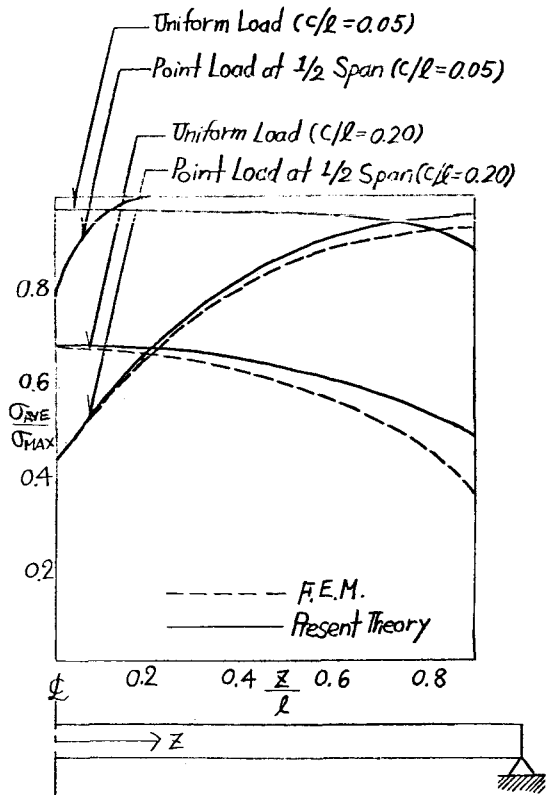
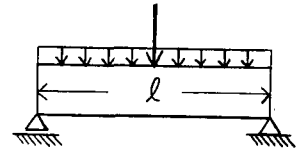
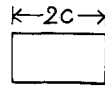
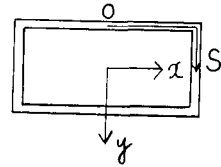
(13-c), (1-a), (3) より応力分布が得られ次式で与えられる。 $\sigma_z = -E(-f_1(s)v^{(1)}(z) + \sum_{i=2}^n f_{2i-1}(s)\varphi_{n-1, 2i-3}^{(1)}(z))$

$$\tau = \frac{E}{t} \left(\int_0^S f_1(s) t ds \right) v^{(1)}(z) + \frac{E}{t} \sum_{i=2}^n \left(\int_0^S f_{2i-1}(s) t ds \right) \varphi_{n-1, 2i-3}^{(1)}(z)$$

4. 数値計算例

以上述べた方法で数値計算を行う。逐次近似解が収束すれば、その値が、(1)(2)(3) で与えられる平面応力問題の解とみなすことができる。収束性は荷重条件、支持条件、断面形状、支間長と断面寸法の比等の影響をうける。単純支持された箱型断面のほりに等分布荷重および集中荷重が載荷されたものについて2次近似理論を用いて計算を行い、参考文献(工)中の有限要素法による解析結果との比較を行う。グラフの縦軸は、フランジの直応力の平均 σ_{AVE} を直応力の最大値 σ_{MAX} で割った値で、つりやる有効巾比である。

果との比較を行う。グラフの縦軸は、フランジの直応力の平均 σ_{AVE} を直応力の最大値 σ_{MAX} で割った値で、つりやる有効巾比である。



参考文献(工) Moffat, K.R. and Dowling, P.J.
Shear lag in steel box girder bridges,
The structural engineer, Vol. 153, Oct 1975