

北見工業大学	正員	奥村 勇
北海学園大学	正員	本多祐也
北海道大学	正員	芳村 仁

1. まえがき 比較的厚い平板の解析には, Reissner, Mindlin, Pao および Love の理論など種々見受けられ, それらに基づいて矩形厚板あるいは円形厚板の解析は古くより多数報告されている。また, 厳密な3次元弾性論に基づいた解析も最近報告されているが, 比較的厚い扇形平板の解析はあまり見当たらないようである。

著者らは, 先に, 部分分布荷重を担う全周単線支持の比較的厚い扇形平板の曲げについて報告したが, 今回, 2円弧辺自由, 2直線辺単線支持の扇形平板の曲げについて報告する。解法の特徴は, 3次元応力解と一般化平面応力解との重ね合わせで, 荷重条件および境界条件を満足するように試みのものであり, 変位あるいは応力成分に関しては, なんらの仮定をも設けていない。

2. 3次元応力解 円筒座標系 (r, θ, z) におけるつり合い方程式の解は, 次のように表わされる。

$$2G\Delta u = -\text{grad}(\bar{\epsilon}_0 + r\bar{\epsilon}) + 4(1-\nu)\bar{\epsilon} + 2\Delta\theta\bar{\epsilon} \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここで } u &= (u, v, w), \quad r = (r, \theta, z), \quad \bar{\epsilon} = (\bar{\epsilon}_r, \bar{\epsilon}_\theta, \bar{\epsilon}_z), \quad \bar{\epsilon} = (0, 0, \bar{\epsilon}_z) \\ r^2\bar{\epsilon}_0 &= 0, \quad r^2\bar{\epsilon}_z = 0, \quad r\bar{\epsilon} = 0, \quad r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

式(2)より変位ポテンシャルを求め, 式(1)に代入すれば変位成分が求められる。変位成分よりひずみ成分を求め, 円筒座標系におけるひずみと応力成分との関係を用いれば, 応力成分の表現が得られるが, それらについては省略する。

3. 一般化平面応力解 円筒座標系における一般化平面応力解は, つり合い方程式および適合条件式より求めることができる。 $z=0$ は, 板の中央面に置き, 板厚を h として, z の正の向きを上向きに取り, 平面応力解に属する項を最初よりはずすと次のようである。

$$\Delta u = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz} = 0, \quad r^2\Delta u = 0, \quad r^2\Delta v = 0, \quad r^2\Delta w = 0, \quad r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \dots\dots\dots (3)$$

$$X' = zX_1' + \frac{2-\nu}{6(1+\nu)}z^3\Delta, \quad r^2X_1' = -\frac{1-\nu}{1+\nu}z\Delta, \quad r^2X_1' = -\frac{1-\nu}{1+\nu}\Delta \dots\dots\dots (4)$$

応力成分および曲げモーメントは, たとえば, 次のようである。

$$\sigma_{rr} = \frac{z}{1+\nu}\Delta + \frac{1}{r}\frac{\partial X_1'}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 X_1'}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{z}{1+\nu}\Delta + \frac{\partial^2 X_1'}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{z}{2r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial X_1'}{\partial \theta}\right) \dots\dots\dots (5)$$

$$\begin{aligned} M_r &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{rr} dz = \frac{h^3}{12(1+\nu)}\Delta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left\{\frac{h^3}{12}X_1' + \frac{2-\nu}{15(1+\nu)}\left(\frac{h}{2}\right)^5\Delta\right\} \\ &= -D\left\{\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2}\right)\right\} + \frac{8+\nu}{40}Dh^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)(r^2w_0) \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } w_0 \equiv w(r, \theta, 0), \quad r^2\Delta^2 w_0 = 0, \quad D = Eh^3/12(1-\nu^2)$$

4. 境界条件 図-1に示した, $\theta = \pm\mu$ の2直線辺が単線支持, $r=a$ の2円弧辺が自由で, 中央に部分分布荷重を担う扇形平板について考えると, 境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \theta = \pm\mu \text{において} \quad w &= 0, \quad u = 0, \quad T_{\theta\theta} = 0, \quad M_\theta = 0 \\ r = a, \text{において} \quad T_{rr} &= 0, \quad S_{r\theta} = 0, \quad M_r = 0, \quad V_r = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここで, $T_{rr} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rr} dz$, $T_{\theta\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta} dz$, $S_{r\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{r\theta} dz$ である。また, 荷重条件は

$$(\sigma_{zz})_{z=\frac{h}{2}} = -p(r, \theta), \quad (\sigma_{zz})_{z=-\frac{h}{2}} = 0, \quad (\sigma_{rz})_{z=\pm\frac{h}{2}} = 0, \quad (\sigma_{\theta z})_{z=\pm\frac{h}{2}} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

であり, 3次元応力解によって満足されているものとす。上式における $p(r, \theta)$ は部分分布荷重をDini展開

したものである。

5. 数値計算例 計算例として、 $r = \pi/4$, $\delta = \pi/16$, $b/a = 8.0$, $d/a = 7.0$, $c = d/4$ の扇形平板について、辺長と板厚との比 $e = d/a$ を種々変えて計算した。また、ポアソン比 ν は 0.17 とした。図-2 には、 $\theta = 0$ における曲げモーメント M_r の分布を示した。扇形平板の中央点 ($\theta = 0$, $r/a = 9/2$) において、薄板理論による値と比較すると、 $e = 5.0, 8.0, 10.0, 12.0$ について、それぞれ 7.0%, 2.7%, 1.8% および 1.2% の相異であり、 $e = 8.0$ 以上においては、 e の相異が M_r におよぼす影響は小さいようである。曲げモーメント M_θ における相異は、 M_r における相異よりさらに小さくなっている。図-3 には、 $e = 8.0$ の場合の $r/a = 9/2$ における σ_{rr} の板厚方向の分布を示した。 $\theta = 0$ においては、薄板理論による値とわずかな相異があるが $\theta = \pi/8$ においては、両者はほぼ一致する。図-4 には、 $e = 8.0$ の場合の $\theta = 0$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の板厚方向の分布を示した。 r/a

$= 9/2$ においては、

薄板理論による値と小さな相異を示しているが、 $r/a = 25/4$ においては、両者はほとんど一致している。荷重直下における応力成分の値が薄板理論と厚板理論とは異なることは、すでに報告されているが、著者らの解析結果もそのことを示している。本報告で示した比較的厚い平

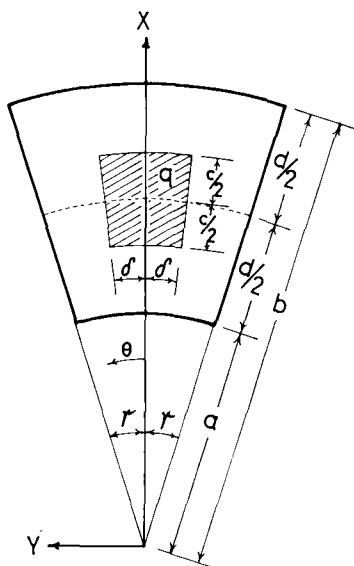


図-1 比較的厚い扇形平板

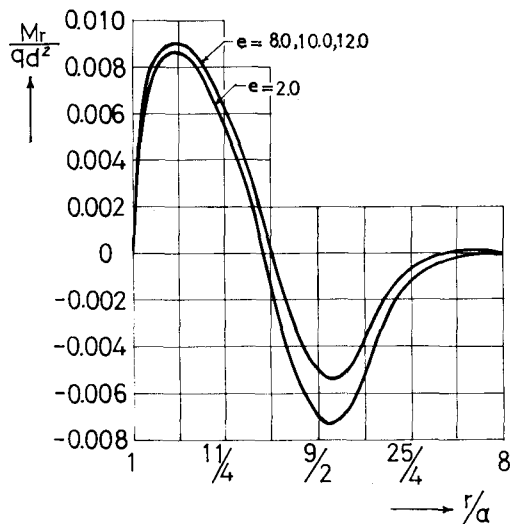
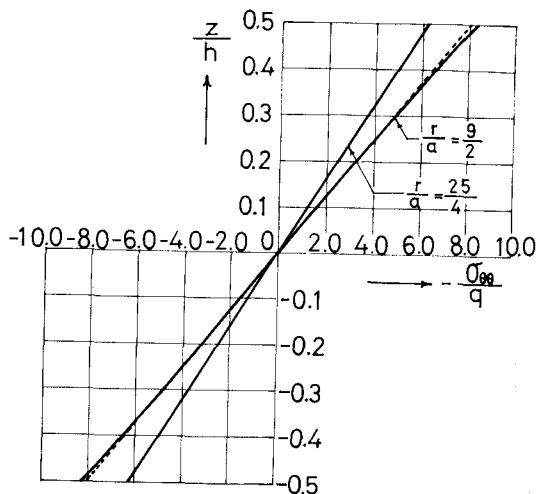
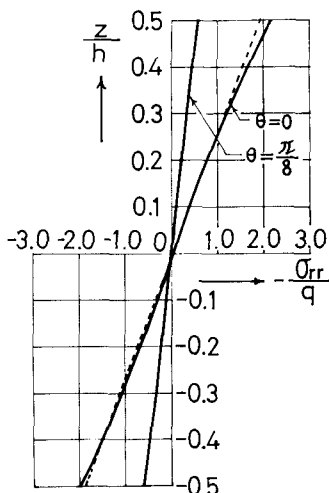


図-2 $\theta = 0$ における M_r の分布

板の解析方法の正確さについては、今後、厳密なる次元弾性論に基づいた解析結果と比較して検討する。

注) 奥村 勇・本多祐也・芳村 仁：比較的厚い扇形平板の曲げ解析について、土木学会北海道支部論文報告集、第35



—: Theory of moderately thick plates
- - - - -: Theory of thin plates

図-4 $\theta = 0$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の分布

号, pp. 57
- 62, 88 54 図-3 $r/a = 9/2$ における σ_{rr} の分布