

山梨大学工学部 正受 平島 健一
東京大学大学院 学生員・村松 正重

1. まえがき

面外荷重と受ける平板は本来3次元体であり、面内はもちろんのこ板厚方向にも応力、変位、ひずみなどの弾性的力学量の状態は変化するものであり、それを厳密に求めるためには、3次元弾性論を適用しなければならぬ。しかし、その一般的解を求めることは事実上、不可能に近く、したがって、できるだけ精度の高い近似解を求めるようにすることが現在の課題である。そのための一つの方法として、弾性力学量と平板の厚さ方向に級数展開し、そのうちの幾つかの低次項を採用することによって問題を2次元⁽¹⁾として取り扱うことが考えられる^(2,3)。その代表的なものとして、変位と展開したものに古典論をはじめとして K. H. Lo's の High-Order 理論があり、応力と展開したものに Ambartsumyan の理論⁽⁴⁾がある。本研究では後者の立場に立つが、板厚方向の直ひずみを零としたうえ、この直ひずみと板厚方向の直応力との間の構成関係をも無視した Ambartsumyan の理論を補正し、構成関係式を用いて板厚方向ひずみ(第1次近似値)と決定することによって、応力を級数展開した理論の逐次近似理論を提示し、二、三の結果と数値例を示すことで目的とする。

2. 構成関係式

板厚の中央面に平行なただ一つの弾性対称面がある場合の板厚方向の直ひずみ ε_z と直応力 σ_z の構成関係は、一般化した Hooke の法則と変形して次式で与えられる。

$$\varepsilon_z = A_1 \varepsilon_x + A_2 \varepsilon_y + A_3 \gamma_{xy} - N \sigma_z \dots \dots \dots (1)$$

ここに A_i , N の値は弾性定数 α_{ik} を用いて表わされるものである。

この関係より ε_z を定めればよいのであるが、一般には右辺のひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ および板厚方向直応力 σ_z の厳密解が不明である。

そこで、ここでは Ambartsumyan の理論から得られた結果を用いて、式(1)から ε_z を求めることにする。もちろん $\varepsilon_z = 0$ の仮定から出発した彼の理論は式(1)が満足されておらず、したがって、上述の方法で求めた結果は、まだ完全には式(1)と満足するものではなく、そこでさらに、同様の操作を繰り返すことによって順次精度のよい結果を求めてゆく必要がある。しかし、ここでは Ambartsumyan 理論の結果を第1次近似とした場合と基準とし、逐次近似値として、主に第2次近似について議論したものである。

3. 支配方程式

まず、Ambartsumyan 理論の誘導過程を flow chart で図示すれば Fig. 2 のようになる。この理論過程で得られた $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ および σ_z と式(1)に代入して ε_z を求める。次に、この ε_z から運動学的関係式：

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \dots \dots \dots (2)$$

を用い、 $z=0$ において $u_z = w(x, y)$ の条件のもとに式(2)を積分すると次のように求められる。

$$u_z = w(x, y) + U, \quad U = \int_0^z \varepsilon_z dz, \quad (ここに、w(x, y) : 板厚中央面の面外(z)方向変位) \dots \dots \dots (3)$$

式(3)を Ambartsumyan による面外方向せん断応力 τ_{xz}, τ_{yz} の仮定：

$$\tau_{xz} = \frac{1}{2}(X^+ - X^-) + \frac{z}{h}(X^+ + X^-) + f_1(z)\varphi(x, y), \quad \tau_{yz} = \frac{1}{2}(Y^+ - Y^-) + \frac{z}{h}(Y^+ + Y^-) + f_2(z)\psi(x, y) \dots \dots \dots (4)$$

から、Fig. 2 と同様にして理論を組み立ててゆく。ただし、 X^+, Y^+ は面内荷重 (cf. Fig. 1), f_1, f_2 は厚さ方向の

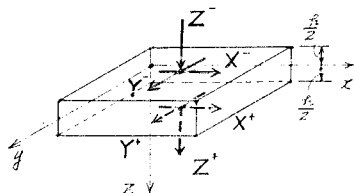


Fig. 1 平板に作用する外荷重と座標系

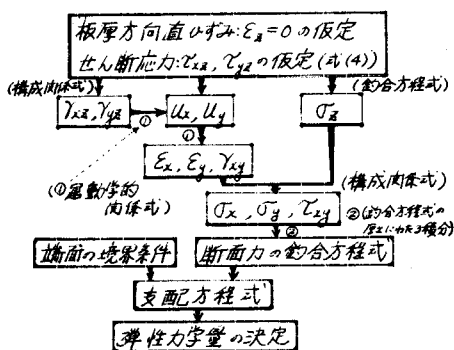


Fig. 2 Ambartsumyan 理論の誘導過程

応力分布形を表わす任意に定めらるる関数であるが、ここでは放物線分布と仮定する。

以下では誘導過程は省略し、かつ数式が繁雑になるのを避けるために直交異方性で面内荷重 $X^{\pm} = Y^{\pm} = 0$ の場合の支配方程式を示せば次のようである。

$$\left. \begin{aligned} C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= A_1 h \frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (B_{11} i_1 + B_{12} i_2) + 2B_{66} \frac{\partial i_{12}}{\partial y} \\ C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= A_2 h \frac{\partial Z_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (B_{22} i_2 + B_{12} i_1) + 2B_{66} \frac{\partial i_{12}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} &= -\frac{12}{h^3} Z_x \\ D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h^2}{10} \left\{ a_{55} (D_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}) + a_{44} (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right\} + \frac{h^2}{12} \psi &= -A_1 \frac{h^2}{10} \frac{\partial Z_1}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (B_{11} j_1 + B_{12} j_2) - 2B_{66} \frac{\partial j_{12}}{\partial y} \\ D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h^2}{10} \left\{ a_{44} (D_{22} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}) + a_{55} (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right\} + \frac{h^2}{12} \psi &= -A_2 \frac{h^2}{10} \frac{\partial Z_2}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (B_{22} j_2 + B_{12} j_1) - 2B_{66} \frac{\partial j_{12}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} i_k &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} I_k dZ, \quad i_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} I_{12} dZ, \quad j_k = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z I_k dZ, \quad j_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z I_{12} dZ, \quad (k=1, 2) \\ I_1 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^h U dZ, \quad I_2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^h U dZ, \quad I_{12} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_0^h U dZ, \quad h: \text{板厚} \\ Z_1 &= \frac{1}{2} (Z^+ - Z^-), \quad Z_2 = (Z^+ + Z^-), \quad u, v: \text{中表面}(Z=0) \text{における } u_x, u_y \text{ の値} \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

上式中の係数 $A_i, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}$ は弾性定数 a_{ij} に関係する力学定数である。Ambartsunyan 理論に対し、上式では非同次の項に差異を認めらるるが、上式で $U=0$ とすれば一致する。

4. 数値計算例

板の上表面 $Z = -\frac{1}{2}h$ に次式：

$$Z^- = -g_0 \sin \frac{\pi x}{L}, \quad Z^+ = 0 \dots (8)$$

のような正弦分布の面外荷重が作用した場合の厚さ h の等方性無限平板の解析結果を示す。例えば、面外変位 (たわみ) w の第2次近似の計算結果は式次のようである。

$$w = \bar{w} \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{40} \frac{8-3\nu}{1-\nu} \left(\frac{h}{L} \right)^2 - \frac{56\nu^2 + 65\nu - 186\nu + 65}{22400(1-\nu)(1+\nu)} \pi^2 \left(\frac{h}{L} \right)^4 \right\} \dots (9)$$

==に、 $\bar{w} = -\frac{g_0}{D} \frac{L^4}{\pi^4} \sin \frac{\pi x}{L}$ は古典論によるたわみである。その他の曲げ応力 σ_x および従来までの理論結果との比較を Fig. 4~6 に示した。

その他の計算例は5に詳細は考案等は学会当日に発表す

3. 参考文献：

- 1) S.A. Ambartsunyan: 異方弾性板の理論 (神谷訳) 森北出版 (1975)
- 2) K.H. Lo & Other: A High-Order Theory of Plate Deformation, Part I, J. Appl. Mech. (1977), pp. 663~668.
- 3) K.H. Lo & Other: Stress Solution Determination for High-Order Plate Theory, Int. J. Solids & Struct. (1978), pp. 655~662.
- 4) 平島小林: 弾性平板の解析理論に関する三つの考察, 第33回土木学会年報, 第1部 (1978) pp. 5~6.
- 5) 日置興一郎: 構造力学 II, 朝倉書店 (1978)

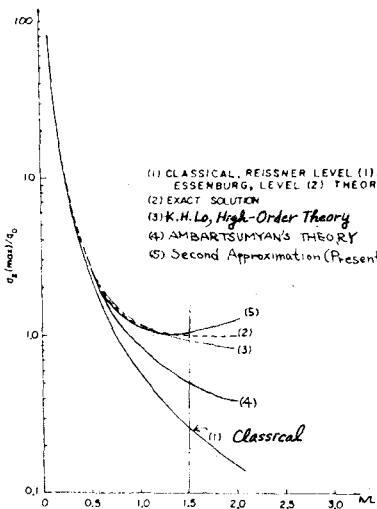


Fig. 5 最大曲げ応力 (σ_{xmax}) ($\nu=0.25$)

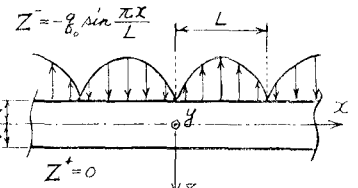


Fig. 3 無限平板に作用する正弦分布荷重

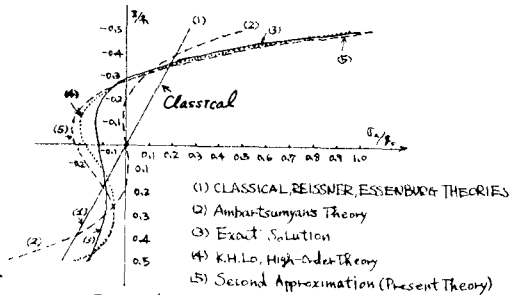


Fig. 4 断面の曲げ応力 σ_x の分布 ($\nu=0.25, h/L=1.5$)

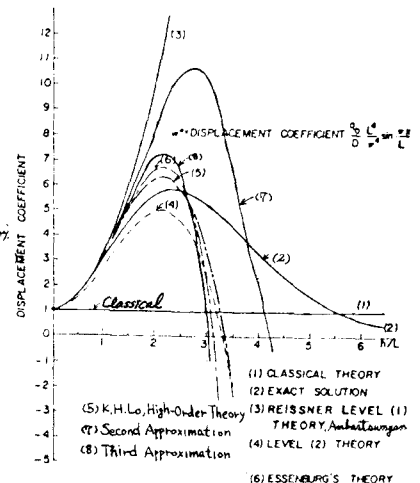


Fig. 6 板厚中央面のたわみ w ($\nu=0.25$)