I-83　直交異方性厚板の三次元応力解析

大阪市立大学　正員　堀川都志雄
大阪市立大学　正員　園田恵一郎

1.はしがき：　著者らは、直交異方性材料からなる板が全周単純支持された場合の解を直交異方弾性体における変位関数を用いて誘導し、さらに板が自重によって変形を受ける場合に対しても可能となる様にする為、物体力を有する変位関数へと拡張した[1)]。しかしながら、このような板を実際の構造物に適合させる場合かなりの制約(例えば、板の境界条件等)を受けることになり、任意の境界条件の下でも適用できるようにする必要がある。

本研究では、物体力を有する直交異方弾性体の変位関数を用いて全周単純支持された板の解を特解とし、境界条件を満足させる為の解を同次解として採用する。　なお、境界条件式はポアソン型のものとする。

2.理論式：　I)特解

。直交異方弾性体におけるフックの法則；

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}, C_{12}, C_{13}, & & & \\ C_{12}, C_{22}, C_{23}, & & 0 & \\ C_{13}, C_{23}, C_{33}, & & & \\ & C_{44}, & & \\ 0 & & C_{55}, & \\ & & & C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix} \qquad \text{———— (1)}$$

式(1)の弾性定数は、歪エネルギーが正値であることより次のような制約を受ける。

$$C_{11}, C_{12}, C_{13}, \text{-----}, C_{66} > 0,$$

$$\begin{vmatrix}C_{11}, C_{12}\\ C_{12}, C_{22}\end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix}C_{11}, C_{12}, C_{13}\\ C_{12}, C_{22}, C_{23}\\ C_{13}, C_{23}, C_{33}\end{vmatrix} > 0, \quad \text{----} \qquad \text{———— (2)}$$

。変位関数；　式(1)と応力の釣合式からナビエーの式を得る。　この式を満たす変位関数は、物体力の独立性に対応して以下のように与えられる。

$$\left[\partial_x^6+a_1\partial_x^4\partial_y^2+a_2\partial_x^4\partial_z^2+a_3\partial_x^2\partial_y^4+a_4\partial_x^2\partial_z^4+a_5\partial_x^2\partial_y^2\partial_z^2+a_6\partial_y^6+a_7\partial_y^4\partial_z^2+a_8\partial_y^2\partial_z^4+a_9\partial_z^6\right]\mathbb{F}=-\frac{2B_5B_7}{B_1B_4}\mathbb{B} \qquad \text{—— (3)}$$

ここで、 $\partial_x=\partial/\partial x$, $\partial_y=\partial/\partial y$, $\partial_z=\partial/\partial z$, $\partial_x^2=\partial^2/\partial x^2$, -----, $\partial_z^6=\partial^6/\partial z^6$, $B_1=C_{11}$, $B_2=C_{22}$, $B_3=C_{33}$, $B_4=C_{44}$, $B_5=C_{55}$, $B_6=C_{66}$, $B_7=C_{12}+C_{44}$, $B_8=C_{13}+C_{55}$, $B_9=C_{23}+C_{66}$,

$$a_1=\frac{B_2B_5+B_4B_6}{B_4B_5}+\frac{B_4^2-B_7^2}{B_1B_4}, \quad a_2=\frac{B_3B_4+B_5B_6}{B_4B_5}+\frac{B_5^2-B_8^2}{B_1B_5}, \quad a_3=\frac{B_2}{B_1}+\frac{B_2B_6}{B_4B_5}+\frac{B_6(B_4^2-B_7^2)}{B_1B_4B_5}, \quad a_4=\frac{B_3}{B_1}+\frac{B_3B_6}{B_4B_5}+\frac{B_6(B_5^2-B_8^2)}{B_1B_4B_5},$$

$$a_5=\frac{B_2B_3}{B_4B_5}+\frac{B_1(B_6^2-B_9^2)+B_2(B_5^2-B_8^2)+B_3(B_4^2-B_7^2)}{B_1B_4B_5}+\frac{2(B_4B_5B_6+B_7B_8B_9)}{B_1B_4B_5}, \quad a_6=\frac{B_2B_6}{B_1B_4}, \quad a_7=\frac{B_2B_6}{B_1B_4}+\frac{B_2B_3+B_6^2-B_9^2}{B_1B_5},$$

$$a_8=\frac{B_3B_6}{B_1B_5}+\frac{B_2B_3+B_6^2-B_9^2}{B_1B_4}, \quad a_9=\frac{B_3B_6}{B_1B_4}, \quad \mathbb{F}=F_x\mathbb{i}+F_y\mathbb{j}+F_z\mathbb{K}, \quad \mathbb{B}=B_x\mathbb{i}+B_y\mathbb{j}+B_z\mathbb{K}.$$

式(3)の弾性定数の独立な数を5および2とする場合、変位関数$\mathbb{F}$は、transversely isotropic 弾性体[2)]および等方弾性体における変位関数に帰着する。

。変位と変位関数との関係式；　以下の議論を簡単にする為、式(3)で示される変位関数のうちF_zのみに限定する。　x, yおよびz方向の変位u, v, wは以下のように示される。

$$2B_5u=-\partial_x\partial_z\left\{\frac{B_4B_8}{B_5B_7}\partial_x^2+\frac{B_2B_8-B_7B_9}{B_5B_7}\partial_y^2+\frac{B_6B_8}{B_5B_7}\partial_z^2\right\}F_z, \quad 2B_5v=-\partial_y\partial_z\left\{\frac{B_1B_9-B_7B_8}{B_5B_7}\partial_x^2+\frac{B_4B_9}{B_5B_7}\partial_y^2+\frac{B_9}{B_7}\partial_z^2\right\}F_z,$$

$$2B_5w=\left\{\left(\frac{B_1}{B_5}\partial_x^2+\frac{B_4}{B_5}\partial_y^2+\partial_z^2\right)\left(\frac{B_4}{B_7}\partial_x^2+\frac{B_2}{B_7}\partial_y^2+\frac{B_6}{B_7}\partial_z^2\right)-\frac{B_7}{B_5}\partial_x^2\partial_y^2\right\}F_z \qquad \text{———— (4)}$$

他の変位関数F_xおよびF_yについては、x, yおよびzをそれぞれ巡環すればよい。

II) 同次解　等方性板におけるライスナー理論を式(1)で示される材料からなる板に拡張することによって、直交異方弾性板の解を誘導する。微小変形のみを対象としているので、i)曲げ問題とii)引張り問題（平面応力問題）の2つに分離することができる。板の中央面内にx, y軸をとり、それと垂直にz軸をとる。

i)曲げ問題[3)]　。変位関数；

$$\left[D_{11}\partial_x^4+2D_{12}\partial_x^2\partial_y^2+D_{22}\partial_y^4-D_{11}E_{23}'\partial_x^6-\left\{D_{12}(E_{22}-E_{23}-E_{12})+D_{12}(E_{11}-E_{12}')\right\}\partial_x^4\partial_y^2-\left\{D_{12}(E_{22}-E_{12})+D_{22}(E_{11}-E_{12}'-E_{23}')\right\}\partial_x^2\partial_y^4-D_{22}E_{23}\partial_y^6\right]\Phi=0 \quad \text{——(5)}$$

ここで、$D_{11}=\frac{h^3}{12}a_{11}$, $D_{12}=\frac{h^3}{12}(a_{12}+4C_{44})$, $D_{22}=\frac{h^3}{12}a_{22}$, $E_{11}=\frac{h^2}{10}\frac{a_{11}}{C_{55}}$, $E_{12}=\frac{h^2}{10}\frac{a_{12}}{C_{55}}$, $E_{12}'=\frac{h^2}{10}\frac{a_{12}}{C_{66}}$,
$E_{22}=\frac{h^2}{10}\frac{a_{22}}{C_{66}}$, $E_{23}=\frac{h^2}{10}\frac{a_{23}}{C_{55}}$, $E_{23}'=\frac{h^2}{10}\frac{a_{23}}{C_{66}}$, $a_{11}=C_{11}-C_{13}^2/C_{33}$, $a_{12}=C_{12}-C_{13}C_{23}/C_{33}$, $a_{22}=C_{22}-C_{23}^2/C_{33}$.

。変位関数とたわみおよび断面力の関係式；

$$W^b=\left[E_{11}E_{23}'\partial_x^4+\left\{E_{11}E_{22}+E_{23}E_{23}'-(E_{12}'+E_{23}')(E_{12}+E_{23})\right\}\partial_x^2\partial_y^2+E_{22}E_{23}\partial_y^4-(E_{11}+E_{23}')\partial_x^2-(E_{22}+E_{23})\partial_y^2+1\right]\Phi ,$$
$$Q_x^b=\partial_x\left[D_{11}E_{23}\partial_x^4+(D_{11}E_{22}-D_{12}E_{12}')\partial_x^2\partial_y^2+\left\{D_{12}E_{22}-D_{22}(E_{12}'+E_{23}')\right\}\partial_y^4-(D_{11}\partial_x^2+D_{12}\partial_y^2)\right]\Phi ,$$
$$Q_y^b=\partial_y\left[\left\{D_{12}E_{11}-D_{11}(E_{12}+E_{23})\right\}\partial_x^4+(D_{22}E_{11}-D_{12}E_{12})\partial_x^2\partial_y^2+D_{22}E_{23}\partial_y^4-(D_{12}\partial_x^2+D_{22}\partial_y^2)\right]\Phi .$$

水平変位u^b, v^bおよびM_x^b ----は、次のような式で与えられる。

$$u^b=-z\frac{\partial w^b}{\partial x}+\frac{3Q_x^b}{2C_{55}h}\left[z-\frac{4z^3}{3h^2}\right] , \quad v^b=-z\frac{\partial w^b}{\partial y}+\frac{3Q_y^b}{2C_{66}h}\left[z-\frac{4z^3}{3h^2}\right] , \quad M_x^b=-D_{11}\left(\frac{\partial^2 w^b}{\partial x^2}+\frac{a_{22}}{a_{11}}\frac{\partial^2 w^b}{\partial y^2}\right)+E_{11}\frac{\partial Q_x^b}{\partial x}+E_{12}'\frac{\partial Q_y^b}{\partial y} .$$

ii)引張り問題　。変位関数；

$$\left[a_{11}\partial_x^4+\left(\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{C_{44}}-2a_{12}\right)\partial_x^2\partial_y^2+a_{22}\partial_y^4\right]\psi=0 \quad \text{——(6)}$$

。変位と変位関数の関係式；　$\psi=\psi_x i+\psi_y j$

$$u^A=-(a_{12}+C_{44})\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y} , \quad v^A=\left(a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+C_{44}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi_x .$$

一方、式(3)、(5)に着目すると、式(3)はzに関して又式(5)はyに関する同じような6次の代数式であることが分る。簡単の為に、式(3)のF_zのみについて論ずる。物体力を零とした場合、関数F_zをx, y方向には三角級数で展開し、z方向にはeのべき乗即ち$e^{\xi z}$で表わすと式(3)はξ^2に関する3次式に帰着する。

$$\Lambda^3+A_1\Lambda^2+A_2\Lambda+A_3=0 \quad \text{———(7)}$$

ここで、$\alpha_m=m\pi/a$, $\beta_n=n\pi/b$, $\Lambda=\xi^2$,
$A_1=-(a_8\beta_n^2+a_4\alpha_m^2)/a_9$, $A_2=(a_7\beta_n^4+a_5\alpha_m^2\beta_n^2+a_2\alpha_m^4)/a_9$, $A_3=-(a_6\beta_n^6+a_3\alpha_m^2\beta_n^4+a_1\alpha_m^4\beta_n^2+\alpha_m^6)/a_9$.

式(7)の解は、$p=A_2/3-A_1^2/9$, $q=A_3-A_1A_2/3+2A_1^3/27$, $\rho=q^2+4p^3$ とおけば、次の3つの場合に分けられる。

$$\left.\begin{aligned}
F_z&=\sum_m\sum_n\left\{C_1\,\mathrm{ch}\,\lambda_1 z+C_2\,\mathrm{sh}\,\lambda_1 z+(C_3\,\mathrm{ch}\,\lambda_2 z+C_4\,\mathrm{sh}\,\lambda_2 z)\cos\lambda_3 z+(C_5\,\mathrm{ch}\,\lambda_2 z+C_6\,\mathrm{sh}\,\lambda_2 z)\sin\lambda_3 z\right\}\sin\alpha_m x\sin\beta_n y & (\rho>0)\\
F_z&=\sum_m\sum_n\left\{C_1\,\mathrm{ch}\,\lambda_1 z+C_2\,\mathrm{sh}\,\lambda_1 z+(C_3\,\mathrm{ch}\,\lambda_2 z+C_4\,\mathrm{sh}\,\lambda_2 z)+\lambda_2 z(C_5\,\mathrm{ch}\,\lambda_2 z+C_6\,\mathrm{sh}\,\lambda_2 z)\right\}\sin\alpha_m x\sin\beta_n y & (\rho=0)\\
F_z&=\sum_m\sum_n\left\{C_1\,\mathrm{ch}\,\lambda_1 z+C_2\,\mathrm{sh}\,\lambda_1 z+C_3\,\mathrm{ch}\,\lambda_2 z+C_4\,\mathrm{sh}\,\lambda_2 z+C_5\,\mathrm{ch}\,\lambda_3 z+C_6\,\mathrm{sh}\,\lambda_3 z\right\}\sin\alpha_m x\sin\beta_n y & (\rho<0)
\end{aligned}\right\} \text{—(8)}$$

λ_1, λ_2, λ_3 は式(7)の根の平方根であり、C_1, ～ , C_6は未定定数である。

III) 境界条件式

I)とII)より得られた変位を$u\,(=u^p+u^b+u^A)$, $v\,(=v^p+v^b+v^A)$, $w\,(=w^p+w^b+w^A)$とすると、例えば固定端の場合での境界条件式は次のように示される。なお、pは特解を意味する。

。曲げ問題；　$\bar{w}=0$, $\varphi_x=0$, $\varphi_y=0$ ———— (9)

。引張り問題；　$\bar{u}=0$, $\bar{v}=0$ ———— (10)

ここで、

$$\bar{w}=\frac{3}{2h}\int_{-h/2}^{h/2}w\left[1-\frac{4z^2}{h^2}\right]dz , \quad \varphi_x=\frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{h/2}u\,z\,dz , \quad \varphi_y=\frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{h/2}v\,z\,dz , \quad \bar{u}=\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}u\,dz , \quad \bar{v}=\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}v\,dz .$$

3.あとがき；　本稿で述べた変位関数は、動的問題に対しても拡張できる。

1)堀川・園田：直交異方弾性体の変位関数，関西支部，昭和54年．
2)堀川・園田・広瀬：積層板の3次元応力解析，オ28回応用力学連合会，昭和53年．
3) Ambartsumyan , S. A. : Theory of Anisotropic Plate , Technomic , pp. 19-40 , 1970 .