

(株)神戸製鋼所 正 中 西 宏
同 同 渡 田 凱 夫

1. まえがき 本報では、Hybrid Stress Model (Assumed Stress Hybrid FEM)^{1)~3)}による連続体の弾塑性解析法について考察し、2次元の場合についてこのモデルによる解析の実用性および解の精度などと検討する。

FEMによる弾塑性解析については、これまでに多くの研究がなされており、とくに変位法に基づく解析手法はすでに確立された感がある。一方、Pianによって提示されたHybrid Stress Modelに関しては、材料非線形問題の解析手法等についてまだ明確でない点があるように思われる。その一つは、塑性域での Complementary energy の評価であり、またその評価の際に弾塑性応力-ひずみマトリックスの逆行列を必要とするが、この応力-ひずみマトリックスが常に特異にならないという保証がないという点である。

そこで本文では、①要素内の各応力評価点における弾塑性応力-ひずみマトリックスの平均として、その要素の弾塑性応力-ひずみマトリックス(要素内で一定)を算定する。②弾塑性応力-ひずみマトリックスの逆行列を求めることを避けるとともに、要素境界の変位場の設定を容易にするため、まず要素内のひずみ場を考え、これに弾塑性応力-ひずみマトリックスを乗じて後の応力場を設定する。しかる後に、要素内におけるつり合条件を満足するようその応力場を修正する。

これらの①、②より塑性域での Complementary energy を評価し、荷重増分法に基づいて弾塑性解析と行なう。計算例として中央に切り欠きと有する板の引張り問題ととりあげ、Hybrid Stress Model に対する上記のような弾塑性解析の解の精度および実用性等と検討する。

2. 弾塑性要素剛性行列 Pianは文献3)で、初期応力法に基づき、弾性域での剛性行列とそのまま用いた弾塑性解析と行なっている。しかしこの方法では、塑性域の拡大とともにつり合状態を求めるための反復が多くなり、計算の効率が著しく阻害されるような場合が生じてくる。そこで本文では、Hybrid Stress Model に関する弾塑性要素剛性行列と以下のように求め、適当な荷重ステップごとに剛性行列を作り直して荷重増分法を適用する。

さて、前述のように要素内の応力場を $\sigma = \text{Dep} \cdot \mathcal{Q}$ の形で表わす(初体力を考慮しない)。Depは3×3の弾塑性応力-ひずみマトリックス、 $\mathcal{Q}$ は3×N(Nは応力の未定常数の数)の行列で、座標の関数である。 $\mathcal{Q}$ はN×1の未定常数のベクトルである。このような応力場では、要素内の各点(応力の評価点)で Depを変えて剛性行列を組むことはできない。なぜなら、要素内のつり合条件を満足することができなくなるからである。このため、Depを次式で近似する。

$$\text{Dep} = \sum W_i \text{Dep}_i, \quad \sum W_i = 1 \quad (1)$$

ここで、Depおよび W_i は応力の評価点における弾塑性応力-ひずみマトリックスおよび重み係数である。

つぎに、 $\mathcal{Q}$ および $\mathcal{Q}_i$ について述べる。ここでは要素内の変位と座標に関し完全1次、2次および3次形式として、これよりまず要素内のそれぞれをひずみと求める。つぎにそれらのひずみに Depを乗じて後の応力場を設定する。しかる後に要素内のつり合条件より、それらの応力場を修正する。このようにして求めた三種の応力場に対する $\mathcal{Q}$ および $\mathcal{Q}_i$ とそれぞれ $\mathcal{S}_I, \mathcal{S}_{II}, \mathcal{S}_{III}$ および $\mathcal{Q}_I, \mathcal{Q}_{II}, \mathcal{Q}_{III}$ と表わす。

$$\mathcal{S}_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q}_I = [a_1, a_2, a_3]^T \quad (2)$$

$$\mathcal{S}_{II} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{33} & d_{23} \\ d_{33} & d_{23} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & d_{11} & d_{12} & d_{33} & 0 & d_{33} & d_{22} & 0 \\ 0 & d_{11} & d_{12} & d_{33} & 0 & d_{12} & d_{33} & d_{22} \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q}_{II} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T \quad (3)$$

$$\mathcal{S}_{III} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & y^2 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 0 & 0 & 0 & x^2 & y^2 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y^2 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{C}_1^{-1} \mathcal{C}_2, \quad \mathcal{Q}_{III} = [a_1, a_2, \dots, a_{11}]^T \quad (4)$$

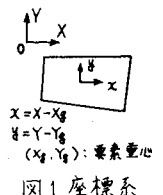


図1 座標系

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{13} & d_{33} & 0 & 0 \\ 2d_{11} & 0 & 0 & 0 & 2d_{13} & 0 \\ 0 & 2d_{32} & 0 & 0 & 0 & 2d_{33} \\ 0 & 0 & d_{33} & d_{33} & 0 & 0 \\ 2d_{31} & 0 & 0 & 0 & 2d_{33} & 0 \\ 0 & 2d_{32} & 0 & 0 & 0 & 2d_{33} \end{bmatrix}$$

d_{ij} : Dep の ij 要素

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & d_{11} & d_{12}+d_{13} & 0 & 0 & 0 & d_{12}+d_{13} & d_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{31}+d_{13} & 2d_{33} & 0 & 0 & 0 & d_{32} & 2d_{12}+2d_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{11} & 2d_{31}+2d_{13} & 0 & 0 & 0 & d_{12}+d_{13} & 2d_{13} & 0 & 0 \\ 0 & d_{31} & d_{12}+d_{13} & 0 & 0 & 0 & d_{32}+d_{23} & d_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{11}+d_{13} & 2d_{33} & 0 & 0 & 0 & d_{32} & 2d_{31}+2d_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{31} & 2d_{31}+2d_{13} & 0 & 0 & 0 & d_{32}+d_{23} & 2d_{33} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

これらの応力場を用いると、要素剛性行列は、

$$k = G^T H^T G \quad (5)$$

$$H = \iint_S S^T \text{Dep} S dA, \quad G = \int_S S^T \text{Dep} L^T N ds, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & m & 1 \end{bmatrix}$$

で与えられる。ここで、 N は $2 \times N_e$ (N_e は要素を構成する節点の数) の行列で境界変位の補間関数、 l および m は境界の外向き法線方向余弦である。なお、要素の各辺が直線であれば、式(5)におけるすべての積分と解析的に実施することができる。

3. 弾塑性解析 本文では荷重増分の各ステップごとに剛性と組み直す。また各荷重ステップにおけるつり合状態の算定には初期応力法を用いる。応力の評価は、

$$\sigma^i = \text{Dep} S^i H^i G^i u \quad u: 2N_e \times 1 \text{ の要素の節点変位ベクトル} \quad (6)$$

がなされる。ここで、 S^i は評価点の座標値ととも埋め込んだものである。この応力の評価点には、Gauss の積分点とすることも考えられるが、式(5)における積分と解析的に実施する場合には要素の境界上の各点とすることもできる。後者の場合には、式(1)の重み係数として、 $w_i = L_i / \int_S ds$ (L_i は左右の評価点間の周長の $1/2$) とすることができ、つり合力の算定ではトラクションに基づくことができる。

4. 計算例 図2に示すような引張荷重と受ける中央切り欠きを有する板の弾塑性解析を行なう。ヤング係数と $2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$ 、ポアソン比と 0.3 、降伏能力と 65 kg/mm^2 とし、ひずみ硬化はないものとして Mises の降伏条件および平面応力の仮定の下に計算する。ここでは、二つの計算を行なった。一つは、式(3)の応力場Ⅱを用い図3モデル1(6節要素)によるもの、いま一つは、式(4)の応力場Ⅲを用い、図3モデル2(8節要素)によるものである。図4に、モデル1の節点68およびモデル2の節点99のY方向変位を示す。図中のX印はモデル2

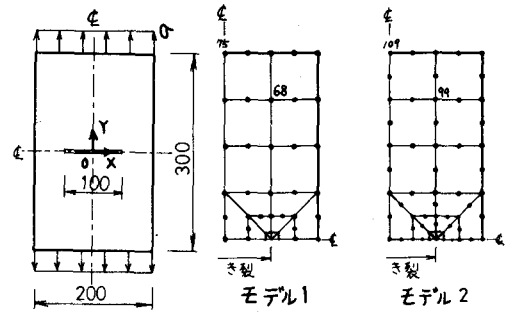


図2 解析モデル(板厚1mm)

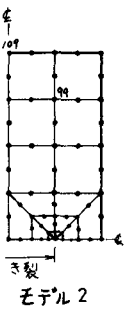


図3 要素分割

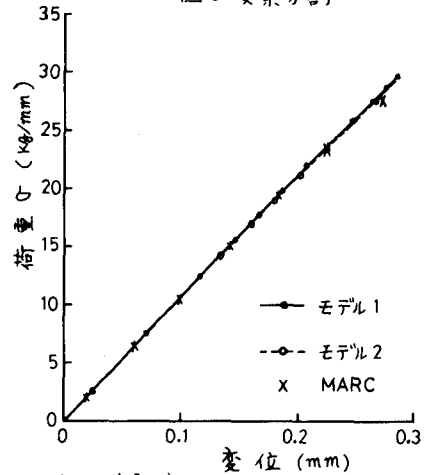


図4 荷重-変位曲線

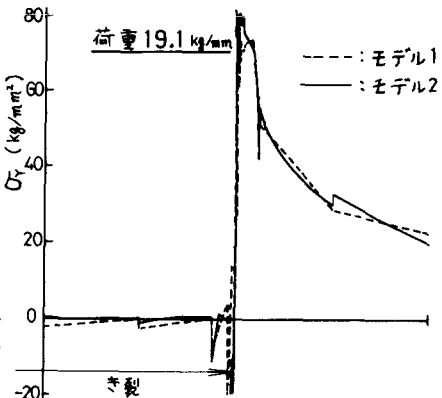


図5 切り欠きを含む面における応力 σ_y

の構造を MARC により計算したものである。三者はほぼ一致していると言える。図5には、切り欠きを含む面における応力 σ_y と示す (荷重 19.1 kg/mm)。ここでは、要素の境界で応力と評価して、切り欠き面に沿ってそのすべての応力と図示した。図より要素の境界において、モデル1および2とも応力が不連続となっており、応力場を高次にとってもそれはこの応力の不連続性が改善されていないということがわかる。

5. まとめ Hybrid Stress Model による2次元連続体の弾塑性解析について一つの手法と提案し、若干の試算を行なった。解の精度や所要計算時間などの点で、とくに問題はなかったようである。

- 1) 賢津:「弾性学の変分原理概論」, 日本鋼構造協会編
- 2) T. H. H. Pien: "Element Stiffness-Models for boundary Compatibility and for prescribed Boundary Stiffness", Proc. of Conf. on Matrix Methods in Str.
- 3) R. L. Spilker and T. H. H. Pien: "Hybrid-Stress Models for Elastic-Plastic Analysis by the Initial-Stress Approach", Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, 1977